第 1 章　リスク回避と期待効用

練習問題 1.1 の解答

解答は，図 1.13 で示されたスプレッドシート CHAP1 のシート 1 である。ジョーはギャンブル A を，クレプス教授はギャンブル B を，パテル教授はギャンブル C を選ぶだろう。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2						賞金の効用		
3			賞金	確率	MBAのジョー	クレプス教授	パテル教授	
4								
5		ギャンブルA	$5,000	1	0.6	-0.951229425	-0.904837418	
6								
7		ギャンブルB	$40,000	0.4	1	-0.670320046	-0.449328964	
8			-$10,000	0.6	0	-1.105170918	-1.221402758	
9								
10		ギャンブルC	$21,000	0.3333	0.85	-0.810584246	-0.65704682	
11			$9,000	0.3333	0.68	-0.913931185	-0.835270211	
12			-$9,000	0.3333	0.1	-1.094174284	-1.197217363	
13								
14						期待効用		
15					MBAのジョー	クレプス教授	パテル教授	
16				ギャンブルA	0.6	-0.951229425	-0.904837418	
17				ギャンブルB	0.4	-0.931230569	-0.912573241	
18				ギャンブルC	0.543279	-0.939469282	-0.896421814	
19								
20						確実性等価		
21					MBAのジョー	クレプス教授	パテル教授	
22				ギャンブルA	$5,000	$5,000	$5,000	
23				ギャンブルB	-$2,500	$7,125	$4,574	
24				ギャンブルC	$2,500	$6,244	$5,467	
25								
26						リスクプレミアム		
27					MBAのジョー	クレプス教授	パテル教授	
28				ギャンブルA	$0	$0	$0	
29				ギャンブルB	$12,500	$2,875	$5,426	
30				ギャンブルC	$4,500	$756	$1,533	
31								
32								

図 **1.13**　スプレッドシート **CHAP1** のシート **1**：練習問題 **1.1** の解

練習問題 1.3 の解答

（**a**）保険会社はこの保険から，$40,000 の保険料を受けとり，その期待支払額は $0.05 \times \$750,000 = \$37,500$ である。したがって，この保険からの期待純収益は$2,500 となる。

（**b**）もし個人がリスク中立的であるならば，保険なしというのは，確率 0.95 で賞金が $1,000,000 と確率 0.05 で賞金が$250,000，つまり期待値$962,500 のギャンブルを「する」のと同じになる。保険証書を購入するならば，火災の有無に関わらず，純資産価値は $960,000 となる。したがって，保険を購入しないほうが賢明である。

（**c**）個人が，リスク回避型の効用関数 $\sqrt{x}$ をもち，期待効用最大を最大化するならば，保険証書を購入することで，個人の純資産価値は確実に$960,000 となる。ここで x は純資産価値である。保険証書を購入しないならば，図 1.14 で示されたギャンブルを「する」ことになる。図 1.14 では，効用水準と期待効用の計算結果が与えられている。この個人の期待効用は[975]である。すると，（$\sqrt{960,000} = [979.796]$ と計算される）確実に$960,000 を得られる場合の効用を計算できる。もしくは，（効用はドル単位の 2 乗根であるので）975 を 2 乗することによる，効用水準[975]に対応する確実性等価，$975^2 = \$950,625$ を計算できる。つまり，この個人は保険証書を購入しないよりも，購入することで，$10,000 改善できる。

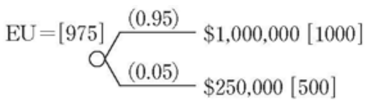


図 1.14　練習問題 1.3：保険証書を購入しない場合に直面するギャンブル

（**d**）部分的に補填する保険の可能性を評価するために，図 1.15 で示された単純なスプレッドシート CHAP1 のシート 2 を使おう。行には，保険料，損失確率，損失がない場合の資産価値，損失額が与えられている。このとき，部分保険が計算される。続く 2 つの行は，損失がない場合（損失がない場合の資産と部分保険の保険料の差額）の意思決定者の純資産と，損失が生じた場合（損失があった場合の資産から，部分保険料と部分的に補償された損失額の和を差し引いたもの）が計算されている。そして，平方根関数を用いて，効用水準，期待効用，そして確実性等価が計算される。

次に，部分保険の保険料を変化させることで，ソルバーで期待効用を最大化させる（確実性等価 CE を最大化させるようにソルバーを設定しても，同一の解を得ることができるだろう）。図 1.15 には，この解が示されている。この個人にとっての最適部分保険は，約

83%の保険となる。そしてこれは個人の CE を，完全保険よりも$211 高めることになる（比較のために，隣の 2 つの列に完全保険の場合と，保険がない場合の数値が与えられている）。

	最適分保険	完全保険	保険なし
保険料	$40,000	$40,000	$40,000
損失確率	0.05	0.05	0.05
損失がない場合の資産価値	$1,000,000	$1,000,000	$1,000,000
損失額	$750,000	$750,000	$750,000
部分保険率	83.60%	100.00%	0.00%
損失がない場合の純資産額	$966,560	$960,000	$1,000,000
損失がある場合の純資産額	$843,564	$960,000	$250,000
損失がない場合の効用	983.14	979.80	1,000.00
損失がある場合の効用	918.46	979.80	500.00
期待効用	979.9037032	979.7958971	975
確実性等価	$960,211	$960,000	$950,625

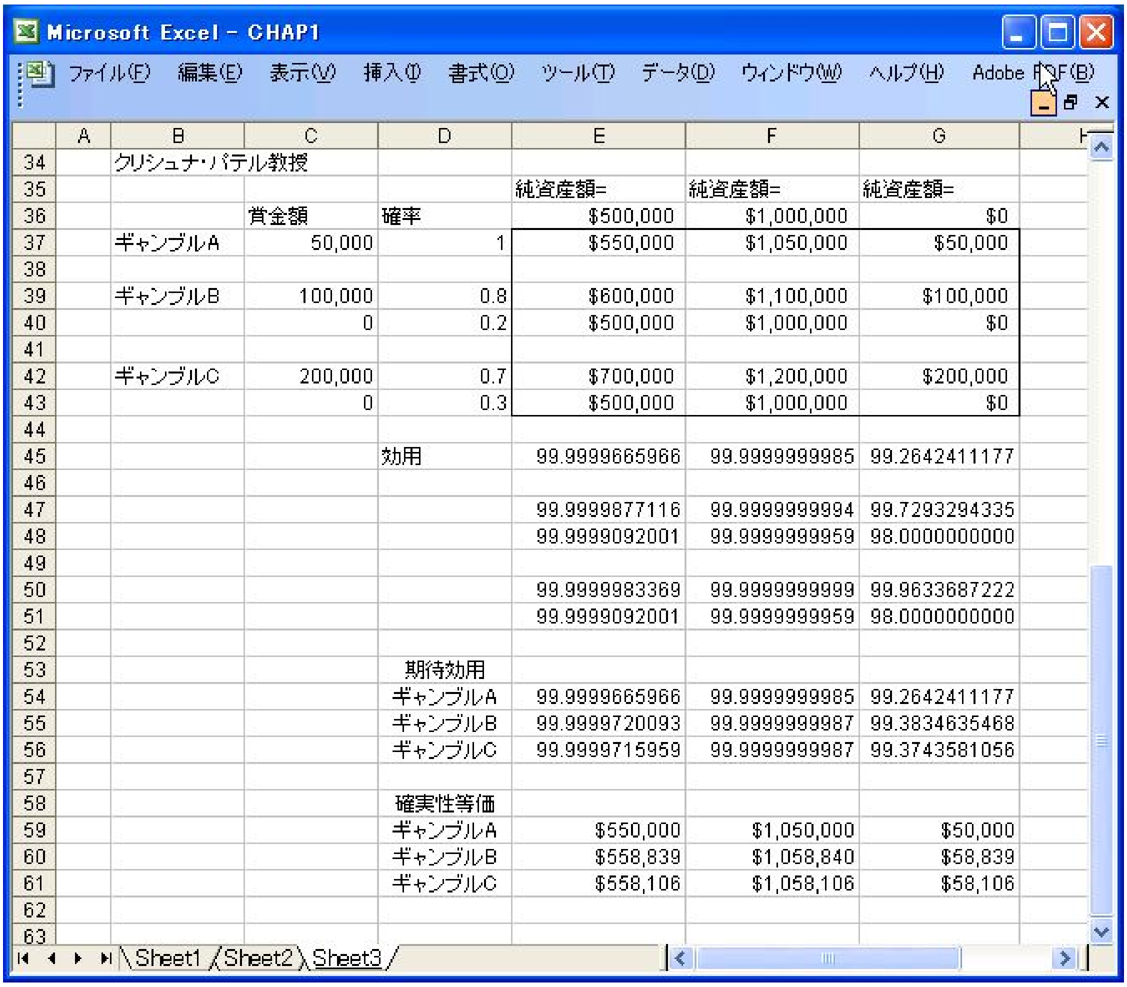
図 1.15　問題 1.3（d）: 最適部分保険　スプレッドシート CHAP15 のシート 2 には，意思決定者のこの保険の最適部分保険率が 83%が導かれることを示している。

練習問題 1.4 の解答

図 1.16 と図 1.17 において，パテル教授と双子の弟のクリシュナ・パテル教授の結果が示されている。数値が説明的であることを願っている。これらは，CHAP1 のシート 3 から得られたものである。そして，これらの数値がどのようにして計算されたかについての疑問を持つならば，助言を求めるべきである（特に，パテル教授の期待効用から CE を計算する公式については注意深く吟味すべきである）。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4		サンジェイ・パテル教授						
5					純資産額=	純資産額=	純資産額=	
6			賞金額	確率	$500,000	$1,000,000	$0	
7		ギャンブルA	50,000	1	$550,000	$1,050,000	$50,000	
8								
9		ギャンブルB	100,000	0.8	$600,000	$1,100,000	$100,000	
10			0	0.2	$500,000	$1,000,000	$0	
11								
12		ギャンブルC	200,000	0.7	$700,000	$1,200,000	$200,000	
13			0	0.3	$500,000	$1,000,000	$0	
14								
15				効用	-1.67017E-05	-7.58256E-10	-0.367879441	
16								
17					-6.14421E-06	-2.78947E-10	-0.135335283	
18					-4.53999E-05	-2.06115E-09	-1	
19								
20					-8.31529E-07	-3.77513E-11	-0.018315639	
21					-4.53999E-05	-2.06115E-09	-1	
22								
23				期待効用				
24				ギャンブルA	-1.67017E-05	-7.58256E-10	-0.367879441	
25				ギャンブルB	-1.39954E-05	-6.35388E-10	-0.308268227	
26				ギャンブルC	-1.4202E-05	-6.44772E-10	-0.312820947	
27								
28				確実性等価				
29				ギャンブルA	$550,000	$1,050,000	$50,000	
30				ギャンブルB	$558,839	$1,058,839	$58,839	
31				ギャンブルC	$558,106	$1,058,106	$58,106	
32								

図 **1.16**　問題 **1.4**：サンジェイ・パテル教授の計算方法



	A	B	C	D	E	F	G
34		クリシュナ・パテル教授					
35					純資産額=	純資産額=	純資産額=
36			賞金額	確率	$500,000	$1,000,000	$0
37		ギャンブルA	50,000	1	$550,000	$1,050,000	$50,000
38							
39		ギャンブルB	100,000	0.8	$600,000	$1,100,000	$100,000
40			0	0.2	$500,000	$1,000,000	$0
41							
42		ギャンブルC	200,000	0.7	$700,000	$1,200,000	$200,000
43			0	0.3	$500,000	$1,000,000	$0
44							
45				効用	99.9999665966	99.9999999985	99.2642411177
46							
47					99.9999877116	99.9999999994	99.7293294335
48					99.9999092001	99.9999999959	98.0000000000
49							
50					99.9999983369	99.9999999999	99.9633687222
51					99.9999092001	99.9999999959	98.0000000000
52							
53				期待効用			
54				ギャンブルA	99.9999665966	99.9999999985	99.2642411177
55				ギャンブルB	99.9999720093	99.9999999987	99.3834635468
56				ギャンブルC	99.9999715959	99.9999999987	99.3743581056
57							
58				確実性等価			
59				ギャンブルA	$550,000	$1,050,000	$50,000
60				ギャンブルB	$558,839	$1,058,840	$58,839
61				ギャンブルC	$558,106	$1,058,106	$58,106
62							
63							

図 **1.17**　問題 **1.4**：クリシュナ・パテル教授の計算方法

〈付録〉

指数型期待効用関数

問題 1.4 の解答から以下のことを注意してもらいたい。

- 双子のパテル教授各々がつける 3 つのギャンブルの順位は，総資産額に依存しない。実際に，各ギャンブルの CE は，双子の資産に対して，線形に上下するだけである。つまり，サンジェイ・パテル教授のギャンブル B の CE は，当初の資産が$500,000 であるならば，$558,839 であり，当初の資産が$1,000,000 であるならば，$1,058,839 であ

り，当初資産が$0 であるならば，$58,839 である。実際にこの効用関数の場合，当初の純資産額が例えば $-\$100,000$ （つまり負債）であるならば，彼のギャンブル B の CE は，この当初の純資産額から，$\$58,839-\$100,000=-\$41,161$ と計算される。当初の資産額を変えることで効用の値は変化するが，経済学的な意味は何も変化しない。

- サンジェイ・パテル教授よりも，クリシュナ・パテル教授は 2 倍興奮しやすく，100 単余分に楽観的であるという問題の注釈にも関わらず，彼らの効用関数は，単に他方の効用関数を「変換して，一様に引き伸ばしたり圧縮」したものである。したがって，彼らは全く同じようにギャンブルを順位付け, 実際に彼らの確実性等価も同一である。異なっている点は，効用の値のみである。

相対的リスク回避度一定の指数型効用関数は，上記 2 つの性質の中で最初のものは，とりわけ特筆すべきことである。つまり，意思決定者が指数型の効用関数を持つならば，あるギャンブルにおいて，全ての賞金に一定量を足したり引いたりして，この量まで確実性等価をシフトさせる。この方法により，例とモデルで指数型効用関数が示したように，比較的計算が簡単となる。

問題 1.2 からさらに例を作ってみよう。保険証書を購入していない個人は，資産が確率 0.95 で$1,000,000 に，確率 0.05 で$25,000 になる状況に直面している。問題 1.2 では，個人は効用関数 $\sqrt{x}$ を持つと仮定されていた。したがって，（保険証書を購入していない）個人の期待効用は $0.95\times\sqrt{1,000,000}+0.05\times\sqrt{250,000}=[975]$ となる。これは確実性等価が$950,625 となることを意味していた。

問題を以下のように変更する。第 1 に，利用可能な保険証書には，免責が$100,000 設定されている。つまり，この保険証書を購入する個人は，損失が発生しなければ，$1,000,000 から保険料を差し引いたものが最終的な資産価値となり，損失が発生すれば，$900,000 から保険料を差し引いたものが最終的な資産価値となる。そして，（他の選択肢が保険なしという状況で）個人が喜んで保険証書を購入するかどうか尋ねる代わりに，この個人が支払う最大の保険料はいくらか，尋ねてみる。

これを解くために，保険料を P として，保険を購入することで，個人の期待効用が以下のようになることに注意しよう。

$$0.95\times\sqrt{1,000,000-P}+0.05\times\sqrt{900,000-P}$$

個人が支払う最大の保険料を見つけるためには，この式が個人の保険がない期待効用水準[975]と等しいとおいて，P に関して解かなければならない。これはそれほど難しく，Excel と，ソルバーもしくはゴールシークどちらかを使うことで，解くことができる。しかし代数的に正確にこれを解く必要はない。

その代わりに，この問題を，指数型の効用関数をもつ個人として，解いてみよう。ここで，個人の期待効用を$U(x) = -e^{-0.00001x}$と特定化しよう。Excel かよい表計算ソフトどちらかが必要になるが，以下のことは直接計算できる。

1. もし個人が保険を購入しないならば，期待効用は以下のようになる。

$$0.95\times\left[-e^{-0.00001\times1,000,000}\right]+0.05\times\left[-e^{-0.00001\times250,000}\right]=-0.00414738$$

それゆえに，保険を購入しないときの，この個人の確実性等価は，以下を解にもつ。

$$-e^{-0.00001\times\mathrm{CE}}=-0.00414738 \quad \text{or} \quad \mathrm{CE}=\frac{\ln(0.00414738)}{-0.00001}=\$548,527.85$$

2. もし個人が$100,000 という免責のある**無料**の保険（つまり，保険料は$0）を購入するならば，彼の期待効用は

$$0.95\times\left[-e^{-0.00001\times1,000,000}\right]+0.05\times\left[-e^{-0.00001\times900,000}\right]=-0.0000493$$

となる。それゆえ，保険料が無料の確実性等価の解は以下のようになる。

$$-e^{-0.00001\times\mathrm{CE}}=-0.0000493 \quad \text{or} \quad \mathrm{CE}=\frac{\ln(0.0000493)}{-0.00001}=\$991,757.79$$

これら 2 つの計算を終えた後，選択肢が保険の購入と購入しないしかない場合に，この個人が支払う最大の保険料はいくらになるか，再び問いかけてみよう。保険料Pは，2 番目のギャンブル（保険があるギャンブル）の賞金を，保険料Pだけ引き下げる。**この個人が指数型効用関数を持つので**，保険料Pは保険がある場合の確実性等価を，ちょうど保険料Pの分だけ引き下げるのである。

言い換えると，この保険証書の保険料がPであるならば，保険がある場合のギャンブルの確実性等価は，$\$991,757.79-P$となる。したがって，この保険で，個人が支払ってもよいと考える最大の保険料は，以下の解をもつ。

$$\$991,757.79-P=\$548,527.85 \quad \text{or} \quad P=\$443,229.94$$

平均-分散モデル

金融論の講義や教科書では，不確実性下の選択として平均-分散モデルに出くわす。リスクのある資産のポートフォリオの選択で主に適用されるが，原則的には賞金が貨幣であるときにはいつも，より広い範囲で使われる。それはとても単純である。賞金が貨幣であるので，各ギャンブルの「平均賞金」の尺度は，その期待貨幣価値，もしくは EMV である。そして，ギャンブルのリスクの尺度は，その分散となる。このとき，意思決定者は，平均-分散平面の，無差別曲線によって表された選好をもつと仮定される。平均が高ければ効用

は高く，分散が低ければ効用は高くなる。

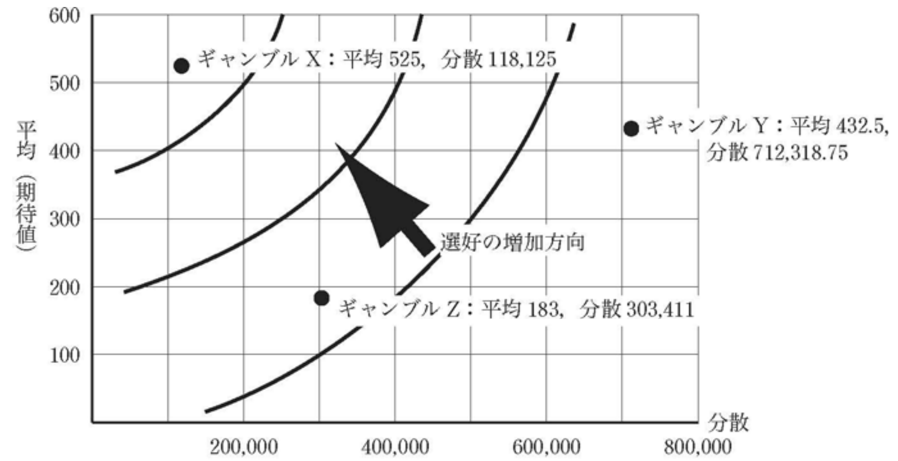


図 1.18　平均-分散選好　この図は，平均-分散平面における「典型的な」無差別曲線を示しており，これら 2 次元にそって図 1.16 からの 3 つのギャンブルを配置している．これらの無差別曲線によって示された選好に基づくと，ギャンブル X が最も選好され，ギャンブル Z が 2 番目となる（ギャンブル X は最も高い平均と最も低い分散を持つので，平均-分散選好の**全て**の集合の中で，一番に位置づけられる）．

例えば，意思決定者が図 1.18 の無差別曲線によって与えられる選好を持つ状況を考えてみよう。さらに，意思決定者は図 1.16 における 3 つのギャンブルから選択をするとしよう。3 つのギャンブルの平均と分散を計算し，平均-分散平面にこれらを配置する。図で示されたように，これらは 3 つの太い点で表される。最初のギャンブルの平均-分散の組み合わせはこの個人にとっての無差別曲線で最大のところにあるので，このモデルに関して選択する点となる。

平均-分散選好は，意思決定者が選択すべき「ギャンブル」が，ある有限の証券リストからなされるポートフォリオであるときには，とても便利なものである。読者の所有している教科書もしくは読者が講義を受けている教授は，この理由を示すことができる。しかし，その通りなのである。そしてこれが，金融論の講義と教科書が平均-分散モデルを使う理由なのである。しかし代数的に便利であるにも関わらず，モデルはとても奇妙な特徴を生じさせる。

たとえば，2 つの投資戦略を考えよう。1 つ目は，確実に$100 の利益がある。2 番目のものは，とてもリスクがあり，分散 n で，$101 の期待利益がある。もし意思決定者が平均と分散の間でトレードオフがあるならば，n が十分に大きいと，確実なものを選好しなければならない。例えば，分散が $n=10^{10}$ という，期待利益での超過$1 を負担には，「極めて大

きなリスク」であるとしよう（より大きな分散であるならば，以下の数値を単純に調整すればよい)。2 番目のリスクのあるギャンブルは，以下のような完全な分布をもつ。確率$\left(10^{11}-1\right)/10^{11}$で，$100 の利益で，確率$1/10^{11}$で$100+10^{11}$の利益である。このギャンブルの期待値は$101 で，分散は$10^{11}-1>10^{10}$である。それゆえ，意思決定者が文字通りの平均-分散選好をもつならば，ギャンブルによって，少なくとも$100 が意思決定者にもたらされ，よりたくさんの賞金を得る機会はほとんどないので，このギャンブルよりもむしろ確実な$100 を選択するように促す。そして仮定したように，意思決定者はこれをしないだろう。

問題は，平均と分散が，確率変数の「平均」と「分散」で大雑把に記述されているからである。しかし，完全な分布を持っており，2 つの記述統計では，個人の分布分布に関しての感じ方を把握できない。平均と分散がアベレージとリスクをよく近似する範囲では，選好に基づく平均-分散モデルは「正確な」選好の近似を与えてくれる。しかし，あくまでも近似なのである。

特定の状況下では，平均-分散選好は完全に機能する。1 つ目は，個人の効用関数が 2 次関数である場合である。つまり，以下のような形状である。

$$U(x)=ax-bx^2 \quad \text{for} \quad a,b>0$$

このとき，いかなるギャンブルであれ，ギャンブルの期待値はmで，その分散はs^2，期待効用は$am+bm^2-bs^2$となる。このギャンブルの期待効用は，ギャンブルの期待値と分散の単純な関数となり，平均-分散モデルが機能する。しかし 2 次関数の効用は問題をもつ。あるx（$x>a/(2b)$）が十分に大きいと，この効用関数はxに関しての減少関数となる。2 次関数の効用をもつ者は，貨幣量が十分に大きいとき，貨幣が多くなるにつれて，より少ない貨幣を選好する。

あるいは，全てのギャンブルの従う分布が，正規分布のような特定の確率分布族に限定されるのであれば，意思決定者の高揚関数がいかなるものであっても，平均-分散選好は機能する。この理由は，この教科書の水準を超えるものであるので，説明は省略する。しかし，部分的に説明するならば，同じ平均と分散をもつ 2 つの正規分布は，同一であることに注意してもらいたい。もし平均と分差が全ての効用関数の選好を十分に記述するならば，これは分布族にとっての十分条件となる。これについて詳細に知りたいならば，金融論の教授に尋ねてもらいたい。