第 7 章　非協力ゲーム

練習問題 7.1 の解答

（**a**）　「行 1」－「列 2」はナッシュ均衡ではない。「列」を選択するプレイヤーが「列 2」を選択するならば，「行」を選択するプレイヤーの最適反応は「行 2」を選択することである。（この問題では求められていないが，このゲームにおけるナッシュ均衡は「行 2」－「列 1」である。）

（**b**）　このゲームにおけるナッシュ均衡は 3 つあり，「行 1」－「列 2」,「行 2」－「列 1」,「行 3」－「列 3」である。（より正確に言えば，これらはこのゲームの純粋戦略による 3 つのナッシュ均衡である。あなたは混合戦略の均衡がわかるだろうか？）

練習問題 7.3 の解答

以下の繰り返し削除の手続きにより，「行 1」－「列 4」となる。

- 「列 4」は「列 2」を支配するので，「列 2」は削除される。
- 「列 2」が削除されると，「行 1」は「行 3」を支配するので，「行 3」は削除される。（「列 2」を削除しなくても「行 2」は「行 3」を弱支配する。）
- 「行 3」が削除されれば，「列 3」（もしくは「列 4」）は「列 1」を支配するので，「列 1」は削除される。
- 「列 1」と「列 2」が削除されれば，「行 1」は「行 2」を支配するので，「行 2」は削除され，「行 1」のみが残る。
- 「行 2」と「行 3」が削除されれば，「列 4」は「列 3」を支配するので，「列 3」は削除される。

  以上の支配の繰り返しの予測により，「行 1」－「列 4」のみが残る。（ここでの繰り返し支配は，「ライバルがどのような戦略をとろうが，他の戦略より利得が小さくなる戦略は削除する」という意味で厳密なものであるから，「行 1」－「列 4」はこのゲームにおける唯一のナッシュ均衡である。）

練習問題 7.5 の解答

この解答では，一番高い入札額の人が二人以上出る（つまり同額の人が出る）ケースは取り扱わない。もし正確な議論をしたいならば，それは読者に任せせよう。

（a）　ファースト・プライス・オークションを考える。あなたが$2,000 で入札する場合に生じる可能性のある事象は以下の 2 つである。1 つはオークションで旅行を勝ち取り，利得が 0 となるケース，2 つめはオークションに負け，旅行をのがし，利得が 0 となるケースである。したがって，$2,000 で入札すれば，オークションの結果がどのようになろうとも（勝とうか負けようが）利得 0 が保証される。しかし，$1,950 で入札し，*かつ他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額が$1,950 未満である場合，*あなたの利得は 50 となる。これは利得 0 よりも良いため，この戦略（$1,950 で入札する戦略）は$2,000 で入札する戦略を弱支配する。

$1,950 で入札する戦略と$1,960 で入札する戦略は，支配の考え方によって比較することはできない。なぜならば，他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額が$1,950 未満であれば，前者の戦略の利得は 50，後者の戦略の利得は 40 となるため，前者の戦略の方が良いが，他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額が$1,950 から$1,960 の間であれば，前者の戦略の利得は 0，後者の戦略の利得は 40 となり，後者の戦略の方が良いということになるからである。（他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額が$1,960 以上である場合には，どちらの戦略の利得も 0 になる。）

$2,000 以上で入札した場合の利得は（負けた場合の）0 か，（勝った」場合の）負の値のどちらかであるため，$2,000 で入札する戦略は$2,000 以上で入札する戦略を弱支配する。

（b）　セカンド・プライス・オークションのケースでは，$2,000 で入札する戦略は，その他のすべての戦略を弱支配する。以下の 2 つのケースを考察し，このことを確認する。

ケース 1：$2,000 で入札する戦略は，$2,000 未満の金額 X で入札する戦略を弱支配する。

1. 他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額 Y が X 未満であるならば，X で入札する戦略は$2,000 で入札する戦略と同様に，2,000-Y の利得をもたらす。
2. 他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額 Y が$2,000 以上であれば，X で入札した場合も$2,000 で入札した場合も同様に利得 0 となる。
3. 他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額 Y が X と$2,000 の間にある場合，X で入札すれば（オークションに負けるので）利得は 0 となるが，$2,000 で入札すれば 2,000-Y の利得が得られる。Y<2,000 なので，$2,000 で入札することが望まし

いことがわかる。

ケース 2：$2,000 で入札する戦略は$2,000 以上の任意の金額 X で入札する戦略を弱支配する。

1. 他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額 Y が$2,000 未満であれば，X の金額で入札する戦略は$2,000 で入札する戦略と同様に利得 2,000-Y となる。
2. 他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額 Y が X 以上であれば，X で入札する戦略と$2,000 で入札する戦略はともに利得 0 となる。
3. 他の 15 人の入札者のうち一番高い値を付けた人の入札額 Y が X と$2,000 の間であれば，X で入札する戦略による利得は$2,000-Y<0 となる一方で，$2,000 で入札すれば利得は 0 となる。したがって，$2,000 で入札することが望ましい。

練習問題 7.7 の解答

(a) 図 7.17 を見てほしい。ジャンがオールド・プロスに行くことを選択するならば，サムの最適反応はオールド・プロスに行くことである。ジャンが美術館に行くことを選択するならば，サムの最適反応は美術館に行くことである。また，ジャンがカフィーンに行くことを選択するならば，サムの最適反応はオールド・プロスに行くことである。したがって，ジャンは美術館に行くことが最適な戦略となる。

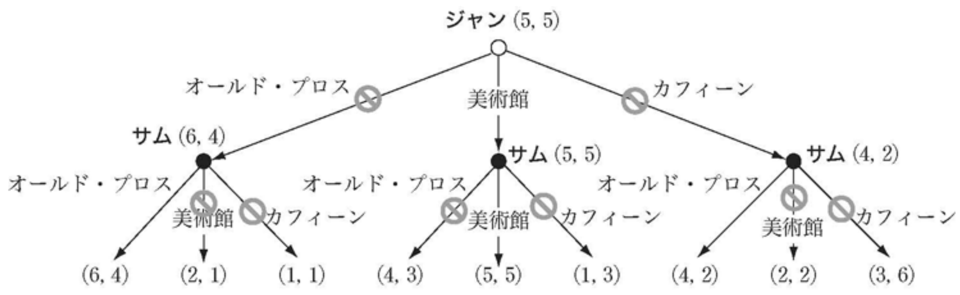

図 7.17　ジャンが最初に決定する場合のバックワード・インダクション　サムの利得が最初に書かれている．

（b）と（**c**）　図 7.18 を見てもらいたい。ジャンの戦略は表の列に示されている 3 通りであるのに対し，サムの戦略は表の行に示されている 27 通りある。表では最初にサムの利得が，2 番目にジャンの利得が書かれている。また，とりあえずしばらくは表内の太字や斜字体になっていることは無視してもらいたい。（3 列で示されている）ジャンの戦略については見ての通りであるが，サムの戦略については説明しておく必要があるだろう。ジャンがオールド・プロス，美術館，カフィーンのどこに行ったのかがサムにわかるならば，

サムは 3 つの情報（「ジャンがオールド・プロスに行く」,「美術館に行く」,「カフィーンに行く」）のそれぞれについて，自分が行く所を決定しなければならない。したがって，サムの戦略を列挙すると，サムにはジャンの 3 つの各戦略に対し，それぞれ 3 つの可能な選択肢があるので，表のように 27 通り存在することになる。例えば，サムの戦略 5 は，ジャンがオールド・プロスに行くならば，サムもオールド・プロスに行くが，ジャンが美術館かカフィーンに行くならば，サムは美術館に行くということを表している。

ジャンの行き先：	オールド・プロス	美術館	カフィーン	ジャンの戦略					
サムの反応：				ジャンの戦略 1 オールド・プロス		ジャンの戦略 2 美術館		ジャンの戦略 3 カフィーン	
サムの戦略 1	オールド・プロス	オールド・プロス	オールド・プロス	6	4	4	3	4	2
サムの戦略 2	オールド・プロス	オールド・プロス	美術館	6	4	4	3	2	2
サムの戦略 3	オールド・プロス	オールド・プロス	カフィーン	6	4	4	3	3	6
サムの戦略 4	**オールド・プロス**	美術館	**オールド・プロス**	6	4	**5**	**5**	4	2
サムの戦略 5	オールド・プロス	美術館	美術館	6	4	5	5	2	2
サムの戦略 6	オールド・プロス	美術館	カフィーン	6	4	5	5	3	6
サムの戦略 7	オールド・プロス	カフィーン	オールド・プロス	6	4	1	3	4	2
サムの戦略 8	オールド・プロス	カフィーン	美術館	6	4	1	3	2	2
サムの戦略 9	オールド・プロス	カフィーン	カフィーン	6	4	1	3	3	6
サムの戦略 10	美術館	オールド・プロス	オールド・プロス	2	1	4	3	4	2
サムの戦略 11	美術館	オールド・プロス	美術館	2	1	4	3	2	2
サムの戦略 12	美術館	オールド・プロス	カフィーン	2	1	4	3	3	6
サムの戦略 13	美術館	美術館	オールド・プロス	2	1	5	5	4	2
サムの戦略 14	美術館	美術館	美術館	2	1	5	5	2	2
サムの戦略 15	美術館	美術館	カフィーン	2	1	5	5	3	6
サムの戦略 16	美術館	カフィーン	オールド・プロス	2	1	1	3	4	2
サムの戦略 17	美術館	カフィーン	美術館	2	1	1	3	2	2
サムの戦略 18	美術館	カフィーン	カフィーン	2	1	1	3	3	6
サムの戦略 19	カフィーン	オールド・プロス	オールド・プロス	1	1	4	3	4	2
サムの戦略 20	カフィーン	オールド・プロス	美術館	1	1	4	3	2	2
サムの戦略 21	カフィーン	オールド・プロス	カフィーン	1	1	4	3	3	6
サムの戦略 22	カフィーン	美術館	オールド・プロス	1	1	5	5	4	2
サムの戦略 23	カフィーン	美術館	美術館	1	1	5	5	2	2
サムの戦略 24	カフィーン	美術館	カフィーン	1	1	5	5	3	6
サムの戦略 25	カフィーン	カフィーン	オールド・プロス	1	1	1	3	4	2
サムの戦略 26	カフィーン	カフィーン	美術館	1	1	1	3	2	2
サムの戦略 27	カフィーン	カフィーン	カフィーン	1	1	1	3	3	6

サムの戦略

図 7.18　ジャンが最初に決定し，それに対してサムが反応するというルールのもとでのサムとジャンのゲームの戦略的表現　ジャンはオールド・プロス，美術館，カフィーンのなかから行き先を一つ決定し，このジャンの決定に対しサムは自分の行き先を決定するが，その数は 27 になる．

全ての利得を記入するには時間と注意を要する。ここで，サムが（上述した）戦略 5 を選択し，ジャンがカフィーンに行くという戦略 3 を選択するケースを考えよう。ジャンがカフィーンに行く場合，サムは戦略 5 にしたがい美術館に行くことになるので，この戦略プロファイルは，サムは美術館に，ジャンはカフィーンに行くことである。ジャンにとって，カフィーンに一人で行くことは 2 番目に悪い利得 2 で，またサムにとって一人で美術館に行くことも 2 番目に悪い（サムの利得は 2)。

設問（a）で行ったバックワード・インダクションによって，以下の予測を行うことができる。もしジャンがオールド・プロスに行くならば，サムも一緒にオールド・プロスに行

く。ジャンが美術館に行くならば，サムも一緒に美術館に行く。ジャンがカフィーンに行くならば，サムはオールド・プロスに行くことを選択する。これが表の太字で示されているサムの戦略 4 である。こうした予測をジャンについても同様に行うと，ジャンは太字で示されている戦略 2 を選択し，美術館に行くであろう。これにより，2 人はそれぞれ太字の斜字体で書かれている利得 5 を得ることになる。

この組み合わせは 1 つのナッシュ均衡である。つまり，ジャンが（戦略 2 を選択し）美術館に行くことを所与とすれば，サムの最適反応は美術館に行くこと（のみ）である。

（d） しかし，ナッシュ均衡はこれ以外にもある。実際，この他に 9 つのナッシュ均衡がある。これら 9 つのナッシュ均衡は図 7.18 の斜字体で表現されている。これらナッシュ均衡は以下の 2 つのタイプに分けられる。

- 9 つのうち 4 つの戦略プロファイルでは，サムはジャンがオールド・プロスに行くならオールド・プロスに行くが，ジャンが美術館に行くならばオールド・プロスかカフィーンのどちらかに行く，ジャンがカフィーンに行くならばオールド・プロスか美術館のどちらかに行くことになる。これら 4 つの戦略プロファイルは，「私（サム）はオールド・プロスに行きたい。だから，あなた（ジャン）がオールド・プロスに行くなら私も行くわ。でもあなたがどこか別の場所に行くなら，（あなたと一緒にオールド・プロスへ行けないことについて）あなたとそして私自身を罰するために，あなたが行く所以外のところへ行くわ」というサムによるある種の「脅し」と考えることができる。この脅しに対するジャンの最適反応はオールド・プロスに行くことであり，サムにとっては何の犠牲も払うことなくできる脅しである。しかし，このような脅しは信じるに値するであろうか。もしジャンが美術館に行くならば，サムは一緒に美術館に行くことが最適となることを無視できるだろうか。自分を「罰する」というコストをかけてまで，サムはオールド・プロスかカフィーンのどちらかに行くだろうか。
- 9 つのうち 5 つの戦略プロファイルは，ジャンは美術館に行く一方で，ジャンが美術館に行くならサムも一緒に美術館に行くが，サムがもしカフィーンに行く場合にはサムはカフィーン以外の場所に行くというものである。（ジャンがオールド・プロスへ行く場合についてはどんな反応でもよい。）こうした戦略プロファイルには 6 通りの可能性が生まれるが，そのうちの 1 つ（ジャンがオールド・プロスかカフィーンに行く場合に，サムがオールド・プロスに行くこと）は最初に考えたナッシュ均衡である。あなたはこれら 5 つの戦略プロファイルを，サムはジャンがオールド・プロスかカフィーンに行く場合どう対応するかには関心がないのだ，という風に考えるかもしれない。

実際にジャンが美術館に行くならば，そうしたサムの無関心は，ジャンがオールド・プロスかカフィーンに行く場合のサムの意思決定には影響を及ぼさないことになる。また，サムがジャンと一緒にカフィーンに行こうとするのでない限り，サムはジャンにカフィーンに行く気を起こさせることはできない。

(e)　これら 9 つの均衡ではサムの戦略が弱支配されていることを証明することができる。事実，弱支配されない唯一のサムの戦略は戦略 4 である。「ジャンがオールド・プロスに行く場合にオールド・プロス以外の場所に行く」というサムの戦略は，「一緒にオールド・プロスに行く」という戦略に弱支配される。「ジャンが美術館に行く場合に美術館以外の場所に行く」というサムの戦略は，「一緒に美術館に行く」という戦略に弱支配される。また，「ジャンがカフィーンに行く場合にオールド・プロス以外の場所に行く」というサムの戦略は，「ジャンがカフィーンに行く場合にオールド・プロスに行く」という戦略に弱支配される。このことは 3 つのバックワード･インダクションに対応することがわかるであろう。したがって，戦略 4 以外のすべてのサムの戦略を削除すれば，バックワード・インダクションにより，ジャンの「美術館に行く」という最適反応がゲームの「解」となる。

このゲームで強支配の概念を最初に適用することもできるということは注目すべきである。例えば，サムの戦略 12 は戦略 4 により強支配される。しかし，強支配を適用するだけではこのゲームの解を求めることはできない。

(f) 図 7.19 のようにすればよい。これは図 7.2 の 3 つのノードをつなげてサムの 1 つの情報集合にしたもので，このケースでは，サムは自分が決定するさいジャンがどのような決定をしたのかわからない（点線の意味は，自分がどのノードにいるかわからないということ)。サムの決定を最初にもってきて，ジャンのノード 3 つをつなげて情報集合を作っても同じ状況を表現でき，この点を理解することは重要である。

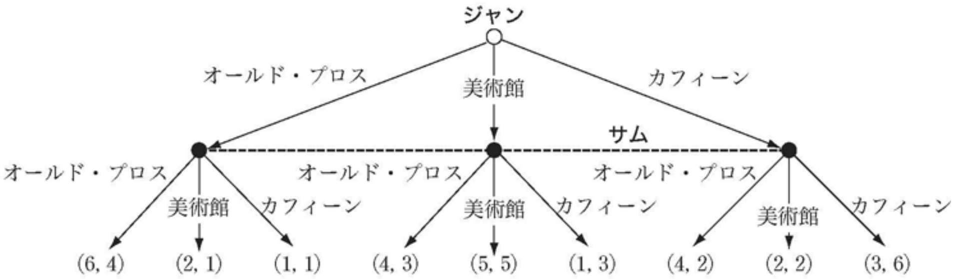

図 7.19　相手の決定を知ることなく，サムとジャンはそれぞれ別々に行動しなければならないというルールのもとでのゲームの展開形表現　サムの情報集合を示す点線から答えを導くことができる．（サムの利得が最初に書かれている．）

練習問題 7.9 の解答

練習問題 7.9 は，経済学者にクールノー・モデル（均衡），ベルトラン・モデル（均衡），シュタッケルベルク・モデル（均衡）として知られている古典的な寡占モデルに関するものである。

設問（a）と（b）は*同時的な戦略決定*に関する問題であり，設問（c）と（d）は企業 A が先に行動し，その後企業 B が行動するという*逐次的な戦略決定*に関する問題である。したがって，設問（a）と（b）ではナッシュ均衡を求め，設問（c）と（d）ではバックワード・インダクションによって均衡を求めればよい。設問（a）と（b）には唯一のナッシュ均衡があることがわかる。また，（もちろん）設問（c）と（d）にもバックワード・インダクションによって唯一のナッシュ均衡があることがわかる。しかし，設問（c）と（d）ではバックワード・インダクションでは求めることのできないその他のナッシュ均衡が存在する。この点については設問（c）の最後に言及する。

（a）　設問 (a) でのプレイヤーの戦略はそれぞれ生産量 x_A と x_B を決定することである。均衡は相手の企業の決定に対する各企業の最適反応である (x_A^*, x_B^*) の組み合わせとなる。例えば，企業 B が x_B を選択するとしよう。企業 A が x_A を選択すれば，企業 A の利潤は以下の式で表される。

$$(p_A - c)x_A = (a - x_A - bx_B - c)x_A = (a - bx_B - c)x_A - x_A^2$$

x_B を所与とした場合に上式を最大化する x_A の値は，x_A で微分して 0 とすれば求まり，それは以下の式で与えられる。

$$x_A = \frac{a - bx_B - c}{2}$$

（より正確に言えば，この式が意味を持つのは $a-bx_B-c \geq 0$ のときである。$a-c \leq bx_B$ ならば，企業 A の最適な選択は $x_A=0$ である。）同様の論理により，企業 A が x_A を選択する場合の企業 B の最適反応は以下の式で表される。

$$x_B = \frac{a - bx_A - c}{2}$$

したがって，これら 2 つの式が同時に成立する点がナッシュ均衡であり，それは次式で表される。

$$x_A^* = \frac{a - bx_B^* - c}{2}, \quad x_B^* = \frac{a - bx_A^* - c}{2}$$

これらより，唯一の解は以下のように導かれる。

$$x_A^* = x_B^* = \frac{a-c}{2+b}$$

図 7.20 はこの解を満たす（x_A,x_B）の組み合わせを図示したものである。各 x_A の値に対する*企業 B の最適反応関数* $x_B(x_A)=(a-bx_A-c)/2$（もし $bx_A \geq a-c$ ならば，$x_B(x_A)=0$）を実線で，*企業 A 最適反応関数* $x_A(x_B)=(a-bx_B-c)/2$ を点線で描いている。両者が交差する点は相手の企業が決定する生産量に対する各企業の最適反応であるため，ナッシュ均衡である。(図では，a=10，b=0.5，c=2 としている。）

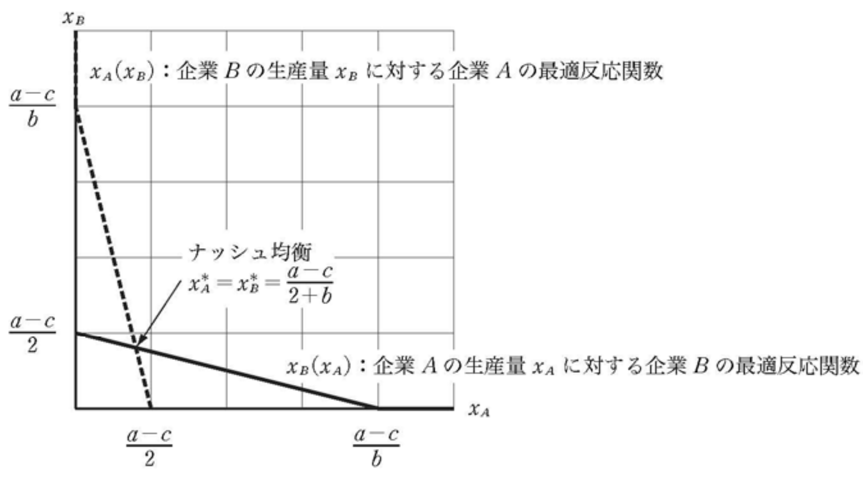

図 7.20　練習問題 7.9(a) の図　実線で描かれている関数 $x_B(x_A)$ は，企業 A の決定する生産量 x_A の各水準に対応する企業 B の最適反応関数である．点線で描かれている関数 $x_A(x_B)$ は，企業 B の決定する生産量 x_B の各水準に対応する企業 A の最適反応関数である．したがって両線が交差する $x_A^* = x_B^* = (a-c)/(2+b)$ が唯一のナッシュ均衡であり，求める設問 (a) の解となる．

（b）　この問題を解くには，まず 2 本の逆需要関数の式を以下の需要関数の形に直さなければならない。

$$x_A = \frac{a(1-b) - p_A + bp_B}{1-b^2}, \quad x_B = \frac{a(1-b) - p_B + bp_A}{1-b^2}$$

2 つの企業にとっての戦略は価格を決定することであるので，ナッシュ均衡は相手の企業の決定する価格に対する各企業の最適反応である（p_A^*, p_B^*）の組み合わせとなる。設問（a）と同じやり方で，企業 B の決定する各 p_B に対する企業 A の最適反応 $p_B(p_A)$を求めることができる。企業 B の選択 p_B を所与とした場合，企業 A が p_A を選択するならば，企業 A の利潤は以下の式で表される。

$$(p_A - c) \times \left[\frac{a(1-b) - p_A + bp_B}{1-b^2}\right] = \frac{[a(b-1) - bp_B]c + p_A[a(1-b) + bp_B + c] - p_A^2}{1-b^2}$$

p_A について微分したものを 0 とすると，以下の式が得られる。

$$p_A(p_B) = \frac{a(1-b) + bp_B + c}{2}$$

同様にして $p_B(p_A)$を求めると，以下のようになる。

$$p_B(p_A) = \frac{a(1-b) + bp_A + c}{2}$$

ナッシュ均衡は各企業が相手の決定に対する最適反応を選択した場合であるので，以下のように求められる。

$$p_A^* = \frac{a(1-b) + bp_B^* + c}{2}, \quad p_B^* = \frac{a(1-b) + bp_A^* + c}{2}$$

これより解は以下のように導かれる。

$$p_A^* = p_B^* = \frac{a(1-b) + c}{2}$$

以上の価格の組み合わせについて均衡を描写したものが図 7.21 である。企業 A の最適反応関数 $p_A(p_B)$ を点線で，企業 B の最適反応関数 $p_B(p_A)$を実線で示している。両者が交差する点がナッシュ均衡である。

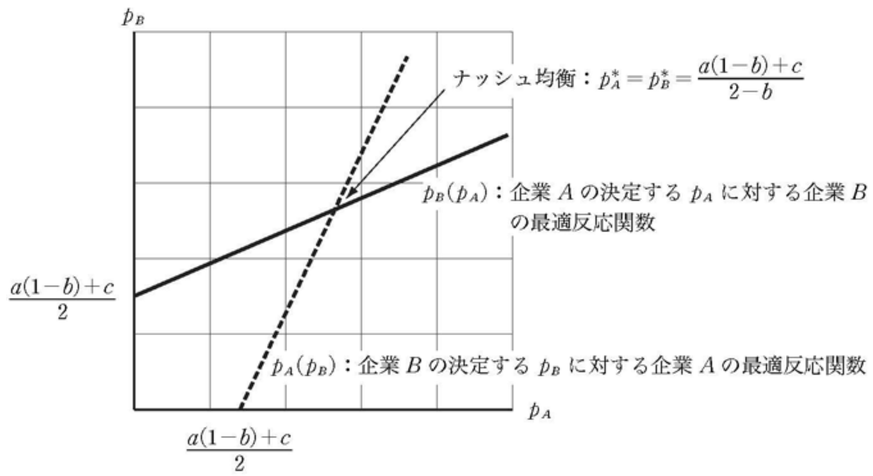

図 7.21　練習問題 7.9(b) の図　実線で描かれている関数 $p_B(p_A)$ は，企業 A の決定する価格 p_A の各水準に対する企業 B の最適反応関数である．点線で描かれている関数 $p_A(p_B)$ は，企業 B の決定する価格 p_B の各水準に対する企業 A の最適反応関数である．したがって，両線の交差する $p_A^* = p_B^* = (a(1-b)+c)/(2-b)$ が唯一のナッシュ均衡であり，求める設問 (b) の解となる．

（c）　企業 A が最初に生産量 x_A を選択し，次に企業 B が生産量を選択するという場合には，バックワード・インダクションが使える。企業 A の生産量 x_A に対する最適な企業 B の決定は設問（a）で求めた $x_B(x_A)$，つまり $x_B=(a-bx_A-c)/2$ である。企業 B がこのように行動することを企業 A は知っているので, 企業 A はこのことを所与にして利潤を最大化するように生産量を決定する。このとき企業 A の利潤は生産量 x_A の関数として以下の式で表される。

$$[a - x_A - bx_B(x_A) - c]x_A = \left[a - x_A - \frac{b(a-bx_A-c)}{2} - c\right]x_A = \left[(a-c)\left(1-\frac{b}{2}\right)\right]x_A - \left(1-\frac{b^2}{2}\right)x_A^2$$

x_A について最大化をもたらす生産量を求めると，以下の式が得られる。

$$x_A^\# = \frac{(a-c)(1-b/2)}{2-b^2} = \frac{(a-c)(2-b)}{2(2-b^2)}$$

この $x^\#_A$ と $x_B(x_A)$を用いると，企業 B の利潤を最大化する生産量 $x^\#_B$ が得られる。

読者の中には少し混乱した人がいるかもしれないが，バックワード・インダクションによる求め方を図に描き，設問（a）のナッシュ均衡と比較してみよう。図 7.22 では a=10, b=0.5，c=2 としている。

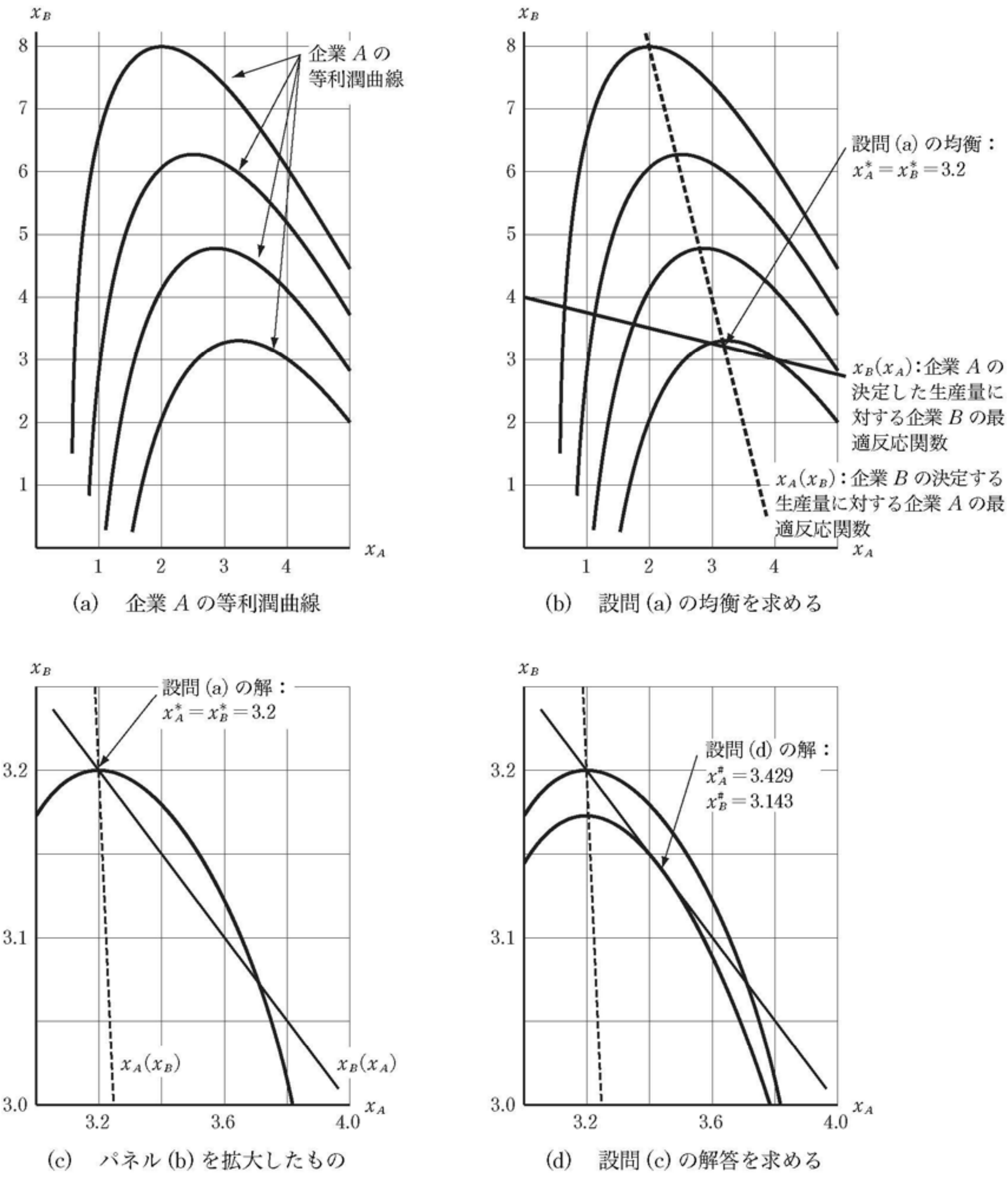

図 7.22 設問 (a) と (c) の比較 パネル (a) は企業 A の等利潤曲線を示している．パネル (b) には（点線の）関数 $x_A(x_B)$ と（実線の）関数 $x_B(x_A)$ が書き加えられている．この両者の交点が設問 (a) のナッシュ均衡である．パネル (c) は，そのナッシュ均衡近くの企業 A の等利潤曲線とともに拡大したものである．企業 A が最初に決定し，その後に企業 B が反応する場合，企業 B は $x_B(x_A)$ において x_A に反応するので，企業 A は望む $(x_A, x_B(x_A))$ の任意の組み合わせを選択することができる．この企業 A の利潤を最大化する選択がパネル (d) に描かれている．

図 7.22（a）は企業 A の*等利潤曲線*を描いたものであり，以下の形状をしている。ただし K は定数である。（4 本の等利潤曲線はそれぞれ，K=4,6,8,10 に対応している。x_B が減少すると企業 A の利潤は明らかに増加するので，最も「下に」位置する等利潤曲線が K=10

の場合である。）

$$(a - x_A - bx_B - c)x_A = K$$

企業 B が生産量を $x_B=8$ とすることを約束するとしよう。このときの企業 A の最適反応はどうすることであろうか。$x_B=8$ の水平線で見ると，企業 A の利潤が最大となるのは $x_A=2$ であることがわかる。$x_B=8$ の水平線は等利潤曲線の接線となるので，$x_A(x_B)=(a-bx_B-c)/2$ に $x_B=8$ を代入すると，$x_A(8)=(10-0.5\times8-2)/2=2$ と求まる。この図において等利潤曲線の「頂点」をつなげると，図 7.22（b）において点線で示されている $x_A(x_B)$が得られる。

$x_A(x_B)$と $x_B(x_A)$と交差する点がナッシュ均衡(x^*_A，x^*_B)であり，設問（a）の答えである。a=10，b=0.5，c=2 のもとでは $x^*_A=x^*_B=3.2$ となる。パネル（b）では $x_B(x_A)$は実線で示されている。

パネル（c）には，ナッシュ均衡とこれを通る企業 A の等利潤曲線を拡大したものが描かれている。（a=10，b=0.5，c=2 のもとでの利潤は 10.24 となる。）2 つの企業が同時に生産量を決定するという設問（a）から離れて，設問（c）の企業 A が先に行動する場合を考えよう。企業 A が先に行動する場合には，企業 B は企業 A の生産量 x_A に対する $x_B(x_A)$にしたがい行動する。このことを知っている企業 A は最も利潤が高くなるような（x_A, $x_B(x_A)$）の組み合わせを選択する。パネル（c）から明らかな通り，企業 B の生産量 x_B が減少すれば企業 A の利潤は増加するので，生産量 x_A から x^*_A まで生産量を増加させることで企業 A は利潤を増加させることができる。では企業 A はどのくらい生産量 x_A を増加させるだろうか？（x_A, $x_B(x_A)$）の線に沿って利潤が最も高くなるところまで生産量を増加させることになる。この生産量の水準 $x^\#_A$ と企業 A の等利潤曲線を描いたものが図 7.22 のパネル（d）であり，a=10，b=0.5，c=2 のもとでは利潤は 10.28571429 となる。

$x_B(x_A)$は（x_B が 0 となるまでは）x_A の減少関数である。このことは*企業A がより多く生産すればするほど，企業B は生産量を減少させることが最適な反応*であることを意味する。企業 A からみれば，企業 B が生産量を減少させることは常に望ましいことである。したがって，設問（a）で求めた均衡に比べて，この問題においては，企業 A は生産量を増加させるため，$x^\#_A > x^*_A$ となる。このことは図から明らかであるが，代数的に証明すれば，（b>0 より）$4-b^2>4-2b^2$ であるので，$(2-b)(2+b)(a-c)>2(2-b^2)(a-c)$が成立し，以下の式が得られる。

$$x_A^\# = \frac{(a-c)(2-b)}{2(2-b^2)} > \frac{(a-c)}{(b+2)} = x_A^*$$

この問題で最後に注意すべきことは，企業 A が先に生産量を決定し，続いて企業 B が決定するゲームのナッシュ均衡を求めてきたが，このゲームにはその他のナッシュ均衡が存在することである。バックワード・インダクションによって導かれた均衡はナッシュ均衡

であることがわかっているので，一般的にバックワード・インダクションにより得られる均衡は常にナッシュ均衡である。しかし，企業 B が以下のように脅しを行う場合を考えてみよう。

もし企業 A（あなた）が生産量を $x_A=(a-c)/20$ とするならば，われわれは生産量を $(20-b)(a-c)/40$ にするだろう。もし企業 A が生産量をその他の任意の x_A にするならば，われわれは生産量を$(a-c-x_A)/b$ にする予定である。

端的に言って企業 B はこの脅しの戦略を暗黙的に用いるものと考えよう。企業 A はどのような選択をするべきだろうか。企業 A が，企業 B が上記の脅しを実行すると信じる場合，企業 A は生産量を $x_A=(a-c)/20$ とすれば，企業 B は生産量を $x_B=(20-b)(a-c)/40$ とするので，正の利潤（$=\{a-(a-c)/20\ -b(20-b)(a-c)/40-c\}(a-c)/20=\{19/20-b(20-b)/40\}(a-c)^2/20>0$, $b<1$ による）を得ることができる。ところが，企業 A がその他の任意の生産量を選択すれば，企業 B は生産量を$(a-c-x_A)/b$ にするので，企業 A の利潤は 0 となる。したがって，企業 A の最適反応は生産量を$(a-c)/20$ とすることである。事実，企業 A が生産量を$(a-c)/20$ とすれば，企業 B の最適反応は $x_B=(20-b)(a-c)/40$ となる。企業 A は生産量を$(a-c)/20$ とするので，「企業 A がその他の生産量を選べばこっちは A の利潤を 0 にする生産量を選ぶぞ」という脅しは企業 B に何の犠牲ももたらさない。実際，これは 1 つのナッシュ均衡である。

しかし，企業 A が$(a-c)/20$ よりも多く生産すると決定するとしよう。この水準を $x^{\#}_A$ とする。企業 B は脅し通り$(a-c-x^{\#}_A)/b$ を生産するだろうか。企業 A が生産量をすでに $x^{\#}_A$ に確定している（変更がない）とすれば，企業 B にとって生産量を$(a-c-x^{\#}_A)/b$ にすることは最適反応ではない。実際，これは企業 B による信頼に値しない脅しに基づくナッシュ均衡である。これは，このゲームの落ち着き先に関する信頼に値する予測とはならない。

(d)　設問（d）の解答は設問（c）と同様にして求めることができるので，簡潔に解説を行う。企業 A が決定する価格 p_A にしたがい，企業 B は $p_B(p_A)=[a(1-b)+bp_A+c]/2$ を選択する。したがって，企業 A が p_A を選択する場合の企業 A の利潤は以下の式で表される。

$$(p_A-c)\left[\frac{a(1-b)-p_A+bP_B(p_A)}{1-b^2}\right]=(p_A-c)\left[\frac{a(1-b)-p_A+b[a(1-b)+bp_A+c]/2}{1-b^2}\right]$$

分母は一定なので無視することができる。したがって，企業 A は以下の式を最大化するように価格 p_A を決定する。

$$(p_A - c)\left(a(1-b) - p_A + \frac{ab(1-b)}{2} + \frac{b^2 p_A}{2} + \frac{bc}{2}\right)$$

p_Aで微分した式を 0 とし，求める p_Aの水準を p_A^bと表記すると，以下のようになる。

$$0 = a(1-b) - p_A^b + \frac{ab(1-b)}{2} + \frac{b^2 p_A^b}{2} + \frac{bc}{2} + c - p_A^b + \frac{b^2(p_A^b - c)}{2}$$，もしくは

$$p_A^b(2-b^2) = a(1-b) + \frac{ab(1-b)}{2} + \frac{bc}{2} + c - \frac{b^2 c}{2}$$

したがって，求める p_A^bは以下のようになる。

$$P_A^b = \frac{2a - ab - ab^2 + bc + 2c - b^2 c}{2(2-b^2)}$$

p_A^bに対応する p_Bの水準は $p_B(p_A^b)$により求められる。

設問（c）のように p_A^*と p_A^bを比較することは有益である。しかし，代数的に証明することはかなり面倒なので，$p_A^b > p_A^*$となることを証明することは読者にまかせよう。価格を先に決定する企業 A は，同時に価格を決定する場合に比べて，あまり攻撃的な行動をとらない（より高い価格付けを選択する）。図 7.21 の $p_B(p_A)=[a(1-b)+bp_A+c]/2$ は p_Aの増加関数であることから，企業 A があまり攻撃な行動をとらない場合，企業 B もあまり攻撃的な行動をとらないだろうことは容易に理解できる。企業 A は常に企業 B が攻撃的な行動をとらないことを選好するので（これは設問（c）と同様である），企業 A は価格をつり上げ，企業 B が攻撃的な行動をとらないようにする（これは設問（c）とは異なる点である）。

これがどのようなナッシュ均衡であるかということ（単なるナッシュ均衡ということだけではなく，企業 B の信頼に値しない脅しに基づくナッシュ均衡ではないということ）には注意されたい（この点については設問（c）と同様である）。