

第5章 消費者行動のモデリング

自然対数関数の性質について

自然対数関数 $\ln(\bullet)$ は、数学において、とても重要な役割を果たす。例えば、指数関数の逆関数は、 $\ln(e^x) = x$ である。ここで e は超越数 2.718... であり、数学者は「イー」と呼ぶ。 $\ln(x)$ は厳密に正の x で定義される。そして厳密な増加関数であり、以下の2つの極限を持つ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

数学的にはかなりいい加減であるが、本書では時に $\ln(0) = -\infty$ と書く。この関数では、 x が 1 のときは 0 をとる、つまり $\ln(1) = 0$ となる。さらに、以下の性質を持つ。

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln(x^a) = a \ln(x)$$

$$\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

さらにある例では、以下の公式も用いる。

$$\frac{d \ln(ax+b)}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

対数効用関数をソルバーを用いて解く

ソルバーは、計算方法の詳細がわかりにくいので、自然対数関数を使うときには、注意をしなければならない。ソルバーは、本質的には関数を以下のようにして最大化する。ある任意の点から、様々な方位、つまり関数が増加する傾きを調べる。そのような増加する方位が見つかったならば、その方位に進み、新しい点での関数を評価する。ステップサイズを徐々に小さいものとし、いかなる方向にも関数を増加させることができないような方位であるとソルバーが判断したならば、ソルバーはこの地点を解として返す。

ところが、変数に制約が課されていると、ソルバーに不具合が発生してしまうこともある。ソルバーは、新しい点での関数を評価し、記述するだけしかできない。そのとき以下のように尋ねてみよう。到達した新しい点は、全ての制約を満たしているだろうか？答えが No であると、制約をできるだけ満たすようになるまで、ソルバーはステップを小さくするのである。

ここで、ソルバーを使って、関数 $3 \cdot \ln(B2) + \ln(B3) + 5 \cdot \ln(B4)$ を最大化してみよう。ここで、セル B2, B3, B4 はパン、チーズ、サラミの量である。エクセルが自然対数関数を評価するさいに、引数が 0 もしくは負であると、エラーを返し、読者が計算しようとすることは計算不可能と返す。したがって、ここで述べた関数を用いるときには、セル B2, B3,

B4に入れる値は決して0もしくは負にならないことを確かめる必要がある。

一見したところ、B2 (B3 と B4 も同様に) が例えば 0.00001 に等しい、もしくはこれよりも大きくなければならないという制約を置かなければならないように感じるかもしれない (B2 ≥ 0 という制約ならば、数学的には B2 が 0 以上となるので可能であるが、ソルバーでは不可能である。したがって、制約では 0 よりもわずかに大きい値を用いている)。

ここで、ソルバーは不具合を引き起こしてしまう。現在の値から、サラミの量 (B4 の値) を減らすことがよいとソルバーは判断していると仮定しよう。ソルバーは、おそらく B2 もしくは B3 を増加させながら、この方位に降りていく。しかし、B4 の新しい値が B4 ≥ 0.00001 という制約を課されているかどうか確認する前に、ソルバーは ... + 5 * LN(B4) を評価する。制約を確認する前に、セル B4 に負の値を返すと、エクセルは負の値の LN と判断し、エラーを返す。ソルバーは、関数を評価する前に、制約を確認するように変更した方がよいだろう。

この問題をどのようにして修正すればよいだろうか？ B2, B3, B4 に先に制約を課すが、効用関数を記述するときには、以下の公式を使うことにする。

$$= 3 * \text{LN}(\text{MAX}(\text{B2}, 0.00001)) + \text{etc.}$$

つまり、エクセルが LN を計算できるか、引数が少なくとも 0.00001 かどうか確認することで、エクセルのエラーを回避する。ソルバーは、制約が満たされているかどうか確認するので、ある点でとどまり、実際の関数の値には影響を与えない。いかなる状況においても、本章での全ての例では上手く機能する。

練習問題 5.2 の解答

149-151 ページの例で解説したものと同一方法で、支出に見合う価値を均等化させると、

$$\frac{6}{b} \frac{1}{1.2} = \frac{3}{c} \frac{1}{3} = \frac{1}{s} \frac{1}{4} \quad \text{or} \quad \frac{1.2b}{6} = \frac{3c}{3} = 4s \quad \text{or} \quad \frac{b}{5} = c = 4s$$

効用は、3 つの財すべてにおいて、厳密な増加関数で、かつ消費者は富をすべて使い切ることが仮定されているので、以下の予算制約が成り立つ。

$$1.2b + 3c + 4s = 20$$

これを整理すると、以下の式を得ることができる。

$$6c + 3c + c = 20 \quad \text{or} \quad 10c = 20 \quad \text{or} \quad c = 2$$

したがって、

$$b = 5c = 10 \quad \text{and} \quad s = \frac{c}{4} = 0.5$$

つまり、消費者はパンを 10 斤 (\$12.00)、2 キロのチーズ (\$6.00)、そしてサラミ 0.5 キロ (\$2.00) 購入する。

練習問題 5.4 の解答

(a) 解では, 3 つの財に厳密に正の消費が行われると仮定される状況からはじめよう. このとき, 支出に見合う価値を均等化させると,

$$\frac{8}{b+2} \times \frac{1}{1} = \frac{6}{c+1} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{2s+1} \times \frac{1}{4}$$

分母と分子を入れ替え, 式を整理すると,

$$\frac{b+2}{8} = \frac{c+1}{3} = 2s+1$$

効用は 3 つの財すべてに対して, 厳密な増加関数であり, 予算制約は解において等号が成立するので,

$$b+2c+4s=\$18$$

支出に見合う価値を均等化させる方程式を用いると,

$$2c = \frac{3b}{4} + 1.5 - 2 = \frac{3b}{4} - 0.5 \quad \text{and} \quad 4s = \frac{b}{4} + 0.5 - 2 = \frac{b}{4} - 1.5$$

したがって, 予算制約は以下のように書き換えることができる.

$$b+0.75b-0.5+0.25b-1.5=2b-2=18$$

これを解いて, $b=10$ となる. それゆえに,

$$c = \frac{3}{8} \times 12 - 1 = \frac{28}{8} = 3.5 \quad \text{and} \quad s = \frac{1}{2} \times \left(\frac{12}{8} - 1 \right) = 0.25$$

これが解である.

(b) 消費者が同じ効用関数で, 予算制約のうち \$6.5 だけ支出し, そして 3 つの財すべて厳密に正の消費をすると仮定すると, (a) と同じ支出に見合う価値を均等化させる方程式を得られるが, 予算制約は以下のように変更される.

$$b+2c+4s=2b-2=\$6.50$$

これを解いて, $b=4.25$ となる. したがって,

$$c = \frac{3 \times 4.25}{8} - \frac{1}{4} = \frac{10.75}{8} \quad \text{and} \quad s = \frac{3.75}{16} - \frac{1.5}{4} = -\frac{2.25}{16}$$

ところで, この解では s が負の値をとってしまい, 非負の制約を満たさない. したがって, 全ての財が厳密に正であるという仮定を満たさない. そこで, 次に解において $s=0$ であるが, b と c は厳密に正であると仮定しよう. したがって, b と c の支出に見合う価値は等しくなければならず, また予算制約は $b+2c=6.50$ となる. (支出に見合う価値が等しいという条件から) $0.75b-0.5$ を $2c$ に代入すると, これは

$$b+0.75b-0.5=6.50 \quad \text{or} \quad b = \frac{7}{1.75} = 4$$

したがって,

$$c = 3 \times \left(\frac{4+2}{8} \right) - 1 = \frac{10}{8}$$

これが解であることをチェックするために、パンとチーズが 4 と 10/8 のときの、支出に見合う価値を評価し、サラミが $s=0$ のときの支出に見合う価値と比較しよう。電卓をつかうと、これらの支出に見合う価値は $8/6=1.333$, $3/(10/8+1)=3/(18/8)=24/18=4/3=1.333$, そして 1 である。したがって、これは解として満たされている。購入した財の支出に見合う価値は均等化され、購入していない財の支出に見合う価値よりも大きいものとなる。最後に、数学的に確認するために、予算制約をチェックする。パン 4 斤にかかる費用は \$4, 10/8 キロのチーズを購入するのにかかる費用は $20/8=\$2.50$, したがって、総支出はちょうど \$6.50 となる。これによって、解を求めることができた。

(c) この問題では、消費者は $\dots + m$ として表す残金が効用関数に入っている。したがって、消費者は残金があると仮定することから始めることにしよう。残金の支出に見合う価値は 1 である。これはパンの支出に見合う価値が $8/(b+2)=1$, つまり $b=6$ のときに等しくなり、チーズの支出に見合う価値が $1/(c+1)=1$, つまり $c=2$ のときに等しくなる。そしてサラミの支出に見合う価値が $1/(2s+1)=1$, つまり $s=0$ のときに等しくなる。この財の組み合わせでかかる費用は、 $6 \times \$1 + 2 \times \$2 + 0 \times \$4 = 10$ であり、したがって、少なくとも残金を \$10 にする限り、これが最適な消費、パン 6 斤、チーズ 2 キロ、サラミ 0 キロ、そして残金 \$10 となる。この解は、初期時点での予算が \$50 や \$500, そして \$18 になっても、同一のものとなる。しかし、初期時点での予算が \$6.50 となった場合には、昼食のために全て支出して、店を出ることになる。そして、解は (b) で解いたものと同じになる。つまりパン 4 斤と、チーズ 10/8 キロである。

練習問題 5.6 の解答

(a) 消費者が組み合わせ (\$5.00, 1本) から得る効用は、 $u(1, 5) = 4 - 1 + 5 = 8$ である。したがって、 m^* は以下のようになる。

$$\begin{aligned} u(1.5, m^*) &= 4 \times 1.5 - 1.5^2 + m^* = 8 \quad \text{or} \\ 6 - 2.25 + m^* &= 8 \quad \text{or} \quad m^* = 8 - 6 + 2.25 = \$4.25 \end{aligned}$$

(b) 点 (\$5.00, 1本) = 8 の効用、つまりこの点を通る無差別曲線は $4c - c^2 + m = 8$, つまり $m = c^2 - 4c + 8$ のような集合 (m, c) となる。そして点 (\$6.00, 1本) = \$9 の効用、つまりこの点を通る無差別曲線は、 $m = c^2 - 4c + 9$ のような集合 (m, c) となる。2 つの無差別曲線を描くためには、これら 2 つの放物線を描かなければならない。図 5.11 は 2 つの無差別曲線を描いたものである。効用が増加する方向は、北だけであることに注意をされたい(残金が多ければ、効用は増加する。今ある 2 つの綿アメに対して、(残金を一定にしたまま) 綿アメを増やすと、より低い無差別曲線に移行することになる。

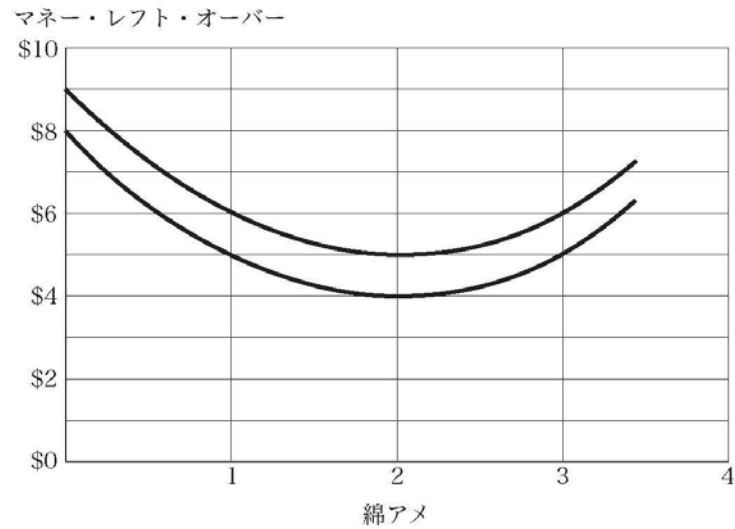


図 5.11 練習問題 5.6 の無差別曲線 残金を多くすることは常によいことであるが、綿アメの効用 $4c - c^2$ は、 $c=2$ を超えて増加することで減少するので、無差別曲線は屈曲する。つまり消費者に綿アメを 2 本より多く与えると、同一の無差別曲線に留まるためには、より多くの残金を与えなければならない。

練習問題 5.8 の解答

予算集合は図 5.12 に描かれている。標準的な三角形の予算集合を描いていることに注意をしてほしい。ここで、予算線（予算集合の外部境界線）に沿った 2 つの点を見つけることで、予算線を確認できる。この 2 つの点を見つけるには、パンに全て支出する組み合わせ（1 斤あたり \$1.20 の費用がかかるパンに \$24 全て支出すると、消費者はチーズを購入しなければ、20 斤購入できる）と、チーズに全て支出する組み合わせ（1 キロ \$3 のチーズに \$24 全て支出すると、8 キロ購入できる）をまず見つける必要がある。これら 2 つの組み合わせに対して、大きな点で示しており、これらを基点とする直線を引き、三角形部分（斜線部）を塗りつぶすと、図 5.12 を得ることができる。

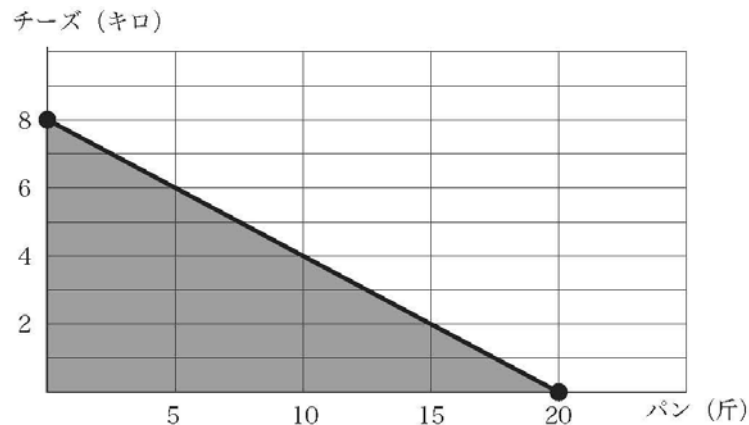


図 5.12 練習問題 5.8：予算集合

練習問題 5.10 の解答

図 5.13 を見てもらいたい。これは、消費水準が中心でピークをもつ等高線の図である。

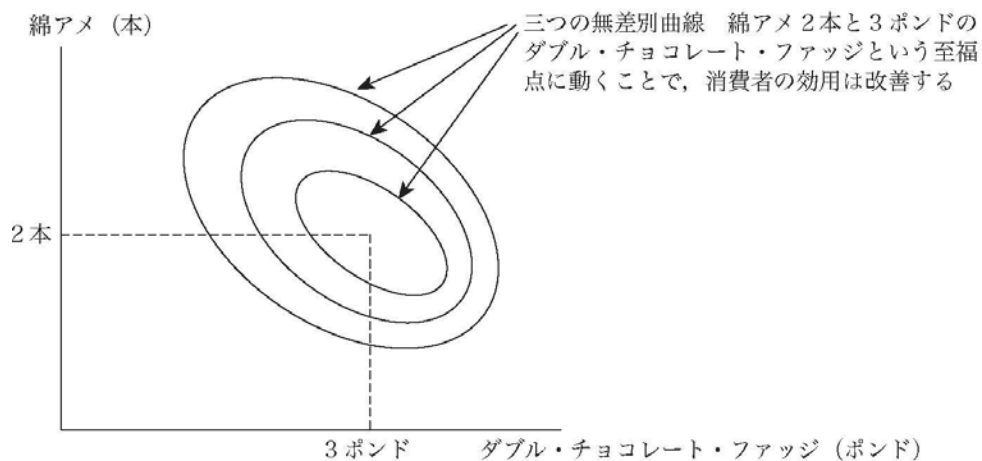


図 5.13 練習問題 5.10：奇妙な無差別曲線

楕円形の傾きは何らかの意味があるかもしれないが、問題で問われたことが全く示されていない。この意味と楕円形が別の方向に傾いているときに意味することを図示できるだろうか？（ヒント：綿アメを増やすに従い、綿アメとダブル・チョコレート・ファッジの最適な消費量でのチョコレート・ファッジの消費水準には何が起きるだろうか？）

練習問題 5.11 の解答

パンもしくはサラミどちらかの消費量が 0 であるならば、効用は $-\infty$ となるので、これら 2 つの財両方は厳密に正の消費であることがわかる。パン 1 斤の価格が \$2 で、サラミ 1 キロの価格が \$2.50 であるときの支出に見合う価値は、

$$\frac{4}{2b} \quad \text{and} \quad \frac{0.5}{2.5s}$$

となる。チーズの支出に見合う価値は、

$$\frac{1}{p_c(c+1)}$$

となる。ここで、消費者は厳密に正のチーズを購入すると仮定すると、支出に見合う価値を均等化させるルールにより、これら 3 つの財の支出に見合う価値も等しくなければならない。分子と分母を入れ替えると、これは、

$$\frac{b}{2} = 5s = p_c(c+1)$$

また予算制約は、 $2b + p_c c + 2.5s = 10$ である。支出に見合う価値を整理すると、

$$2b = 4p_c(c+1) \quad \text{and} \quad 2.5s = 0.5p_c(c+1)$$

したがって、予算制約は以下のように書き換えることができる。

$$4p_c(c+1) + p_c c + 0.5p_c(c+1) = 5.5p_c(c+1) = 10$$

これを解いて、

$$c(p_c) = \frac{10 - 5.5p_c}{5.5p_c}$$

これは、需要量が非負である価格 p_c に関する需要関数である。価格 p_c が $10/5.5$ を超えると、チーズの需要量は 0 となる。

練習問題 5.12 の解答

(a) 逆需要関数を見つけるためには、単に「巧妙な」関数の微分を計算すればよい。

- パンの逆需要関数は $P(b) = 1/b$
- チーズの逆需要関数は $P(c) = 1/(c+3)$
- ファッジの逆需要関数は $P(f) = 2 - 2f$ 。ここで、この関数では f は 1 に近づくと負の値となることに注意をされたい。そして、この消費者が 1 キロ以上の消費を選択するには、この消費者に補償をしなければならない。

需要関数を求めるには、これらの式の逆関数をとらなければならない。

- パンの需要関数は $D(p_b) = 1/p_b$
- チーズの需要関数は、 $D(p_c) = (1/p_c) - 3$ である。ここで、この関数は $p_c > 1/3$ のとき負となることに注意をされたい。これは、消費者はチーズ 1 キロ当たり \$0.33 よりも高いとチーズを購入しないことを意味する（チーズ愛好家でないか、よいチーズでない）。
- ファッジの需要関数は、 $D(p_f) = (2 - p_f)/2$ である。この関数は、 $p_f = 2$ のときには負となり、消費者は 1 キロ当たり 2 キロよりも高いとファッジを購入しないことを意味する。

(b) パンへの支出は一定で\$1である。チーズへの支出は $p_c[(1/p_c)-3]=1-3p_c$ であり、これは $p_c=0$ のときに最大化される。この価格では、消費者のチーズへの需要は無限大となる。しかし、チーズの価格が下落するにつれ、チーズへの支出は\$1へと上昇する。したがって、チーズへの最大の支出額は\$1となる。そしてファッジへの支出は $(2p_f - p_f^2)/2$ で、 $p_f = \$1$ のときに最大化され、支出は\$0.50となる。それゆえ、この消費者はこれら3つの財に\$2.50支出する。消費者の予算が\$2.50より大きいものである限り、いかなる価格水準であり限り、これら3つへの財への支出はこの値となり、残金が発生する。

練習問題 5.13 の解答

これらのケース各々では、消費者の需要関数は、巧妙な関数の微分によって「与えられている」。より正確に言うならば、消費者の需要関数は、 $v'(x)$ となる。ここで v' は v の微分である。

(a) それゆえに、 $v(x)=x^{1/2}$ のとき、 $v'(x)=(1/2)x^{-1/2}$ となる。消費者の逆需要関数は $P(x)=(1/2)x^{-1/2}$ であり、需要関数は逆関数 $D(p)=2/p^2$ となる。ここで、価格が0に近づくとき需要量は無限大になり、全ての価格で厳密に正であることに注意をされたい。

(b) $v(x)=10\ln(x+1)$ であるとき、 $v'(x)=10/(x+1)$ となる。したがって、消費者の逆需要関数は $P(x)=10/(x+1)$ である。 $x=0$ のとき、価格は10をとり、価格が\$10よりも高いときには（もしくは使用する貨幣がいかなる形態であれ）、消費者はこの財を購入しないことを意味する。 x が無限大となると、価格は正にとどまる。したがって、需要はこの「逆」となり、

$$D(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } p > \$10 \\ (10/p) - 1 & \text{if } \$0 < p \leq \$10 \end{cases}$$

(式 $(10/p)-1$ を得るためには、方程式 $p=10/(x+1)$ を x について解きなさい。)

(c) $v(x)=6x-x^2$ のとき、 $v'(x)=6-2x$ となる。ここで、 $x=0$ のとき、10の値をとり、 $x=3$ のときには0となることに注意をされたい。したがって、消費者は価格が\$6よりも高いと、 x を購入しない。そして x がただでなくなっても、たった3単位しか購入しない。これは線形の需要関数を意味し、

$$D(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } p > 6 \\ 3-(p/2) & \text{if } 0 \leq p \leq 6 \end{cases}$$

となる。

(d) この巧妙な関数 v において、 $x \leq 1$ のときには $v'(x)=1/x$ となり、 $x \geq 1$ のときには $3-2x$ となる。 $x=1$ という臨界値では、この効用は両端から0に近づく連続関数となることを確認したほうがよいかもしれない。そして、微係数は両端から滑らかに1に近づく。この例

でのポイントは、価格がどんなに高いものであろうとも、需要は正となることである。つまり、 $p \geq 1$ では、 $D(p) = 1/p$ となる。しかし価格 $p = 0$ では、消費者はたった $x = 3/2$ しか受容しない。したがって、価格がどんなに高くても、決して需要が 0 とならず、価格が 0 に近づくと有限水準を有する需要関数となる。

x と残金を持つ効用関数が $v(x) + m$ であるときに、この問題の空欄を埋めよう。

- もし $v'(0) = \infty$ ならば、価格がいかなる水準であらうとも、財の需要量は厳密に正の値となる。しかし、もし $v'(0)$ が有限ならば、価格が $v'(0)$ まで上昇すると、需要量は 0 となる。
- もし $v' > 0$ ならば、価格が 0 まで下がると、需要量は ∞ となる。しかし、 v' が 0 に近づくならば、価格が 0 まで下がったときに、需要量の増加は価格が 0 に近づく水準でとまる。