第 9 章　生産技術と費用最小化

練習問題 9.1 の解答

（a）椅子 4 脚および 6 脚に対応する等量曲線は以下の図 9.10 のようになる．6 脚の場合の等量曲線について説明しておこう．最低 12 時間の労働と 6 時間の旋盤加工が必要であり，かつ，合計 36 時間の投入要素の組み合わせが必要になる．

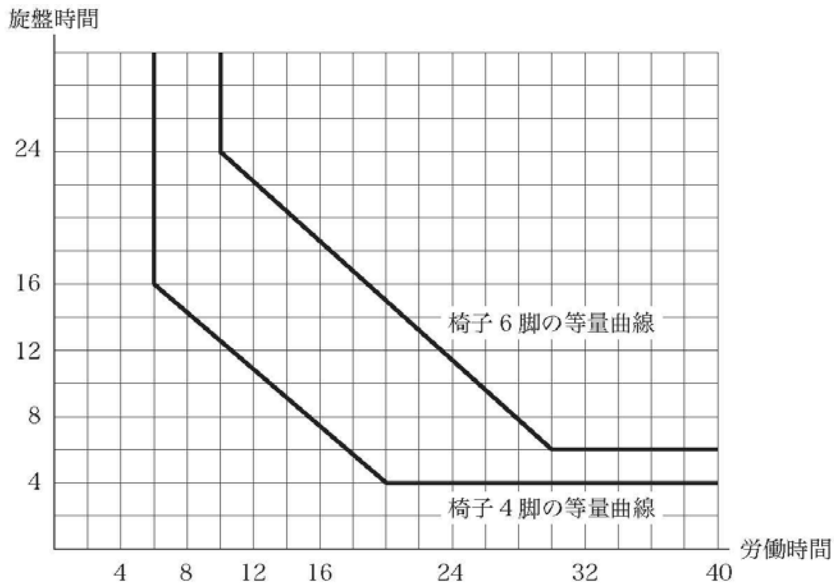

図 9.10　練習問題 9.1：等量曲線図

（b）図 9.11 を用いて，椅子 6 脚をつくる場合の最も安価な生産方法を求めてみる，まず与えられた各投入要素費用から，適当に等費用線を描いてみる．ここでは$240 の等費用線を取り上げよう．横軸切片では労働 24 時間と旋盤 0 時間の組み合わせ，縦軸切片では旋盤 16 時間と労働 0 時間の組み合わせとなり，それらの点を結ぶと総費用$240 に対応する等費用線を描くことができる．次にこの等費用線を平行移動させていくと等量曲線の角でこれらが接することを確認できる．そこでは労働 30 時間と旋盤 6 時間の組み合わせで，総費用は $\$10 \times 30 + \$15 \times 6 = \$390$ となる．この生産方法では，労働 12 時間以上，旋盤 6 時間以上，合計 36 時間以上という最低必要時間に関する条件もすべて満たされており，したがって最も安価な生産方法である．

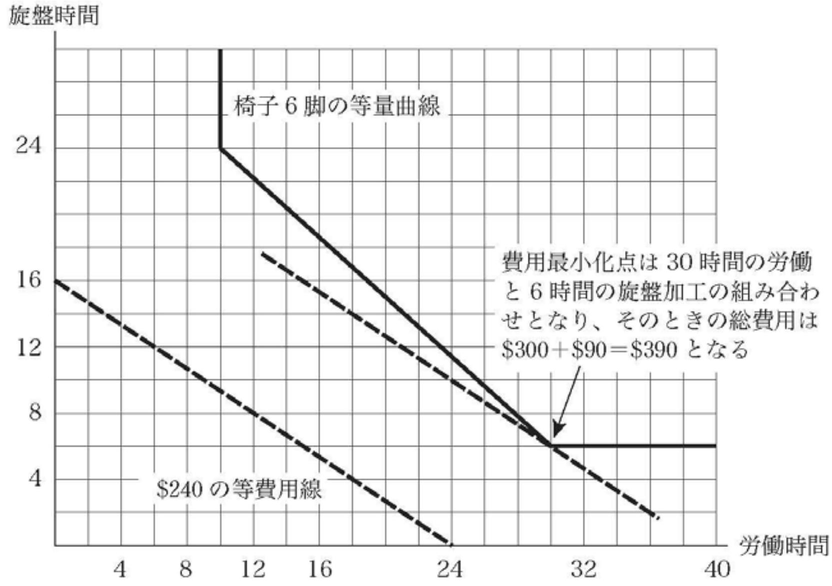

図 9.11　練習問題 9.1：椅子 6 脚をつくる最も安価な生産方法の決定

（c）規模に関して収穫一定の生産技術をもっているから，総費用は直線で表され，また平均費用も限界費用も同様に直線で表されかつフラットな形状になる．問（b）の解答より，1 脚当たりの総費用は$65（$390/6）であるから，各費用関数は図 9.12 のように描くことができる．

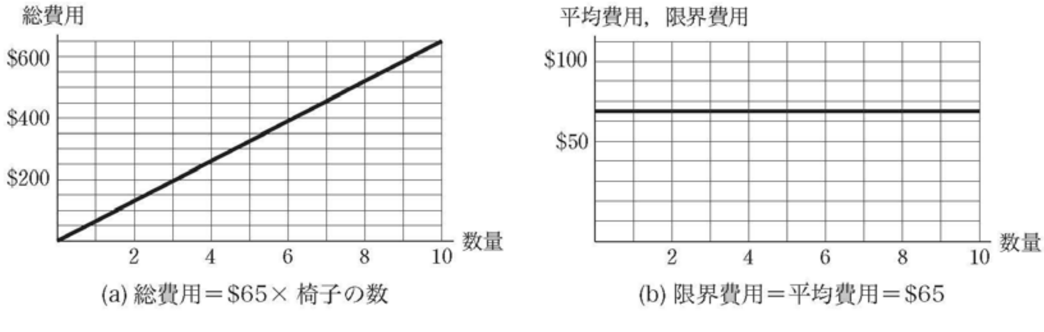

図 9.12　練習問題 9.1：費用関数（総費用，平均費用，限界費用）

練習問題 9.3 の解答

（a）非代替的技術

（b）固定的技術係数

（c）限界代替率一定

練習問題 9.5 の解答

（a）まず等量曲線の図を用いて解法を考えよう．図 9.13 に産出 100 単位に対応する等量曲線が描かれているので，各投入要素価格の情報を使ってそこに適当な等費用線を引いてみる. ここでは 2 点（$m=0, l=200$）と（$m=400, l=100$）のあいだで引かれた, 費用水準$800 に対応する等費用線を描いておく．次に，傾きを一定に保ったままで，この等費用線をちょうど先の等量曲線に接するまで移動させてみよう．$800 の等費用線であれば，図のように下側に移動させればよい．接点における投入要素の組み合わせは，($m=200, l=50$) となり，そこから，費用最小化行動に則って 100 単位を生産する場合の総費用は次のように計算できる．

$$TC(100)=\$1\times 200+\$4\times 50=\$400$$

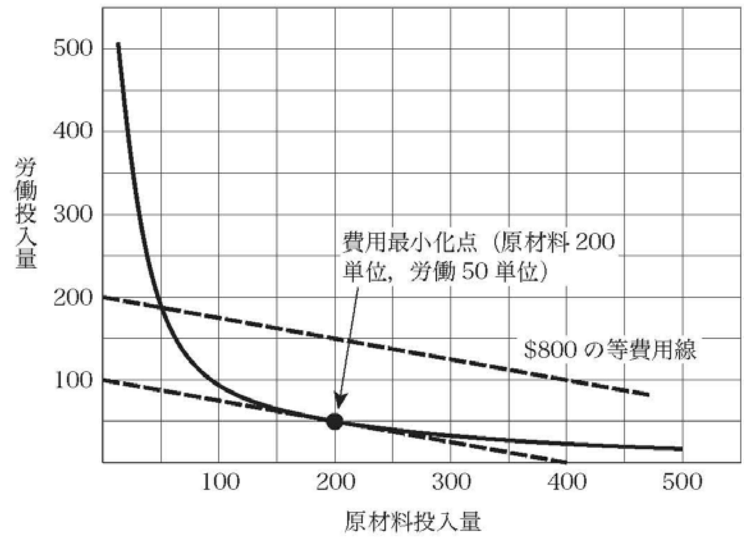

図 9.13　練習問題 9.5(a)：図による解法

続いて，スプレッドシートを用いて解いてみよう．スプレッドシートでは，与えられた生産関数より，m と l の投入量に応じて総産出量が，また，各投入要素価格から総費用関数 $m+4l$ によって, 要素投入量に応じた総費用が計算される. ソルバーを利用することにより，産出水準を 100 単位（もしくはそれ以上）として，総費用を最小化する計算が実行できる．図 9.14 はその結果を示している．問題 9-5 のスプレッドシートでは，要素投入量の初期値は $m=l=100$ となっている．図の計算結果では，わずかながら丸めの誤差があることに注意しよう．

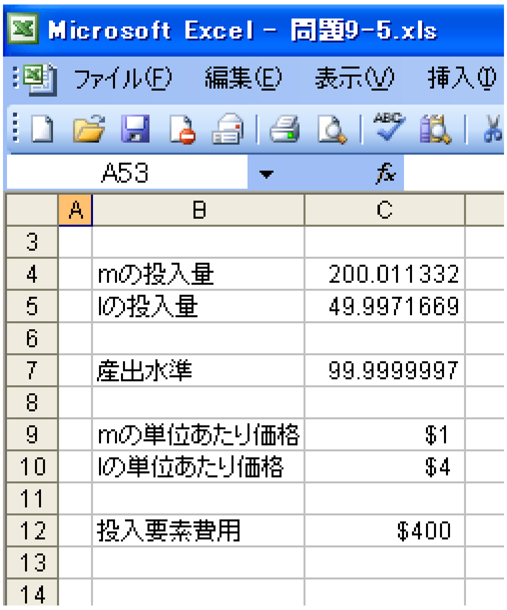

図 9.14. 問題 9.5（a）：ソルバーを使った解法

最後に微分計算を利用して代数的に問題を解いてみよう．はじめに，正の産出を得るには，各要素投入量も正でなければならないことに注意しよう．ここでおなじみの以下の法則を適用する．

$$\frac{r_l}{MPP_l} = \frac{r_m}{MPP_m}$$

２つの投入要素に関する物的限界生産物関数は，それぞれ，

$$MPP_l = \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{1}{2} l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}, \quad MPP_m = \frac{\partial f}{\partial m} = \frac{1}{2} l^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}}$$

となる．したがって，法則を適用すると，

$$\frac{4}{\frac{1}{2} l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} l^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}}}$$

となるから，これより，$m = 4l$ という関係式を得る．これが費用を最小化する生産計画（生産要素の組み合わせ）である．

かりに l^* 単位の労働を使って x 単位の産出を得たい場合には，$4l^*$ 単位の原材料を投入すればよく，生産関数より $f(l^*, 4l^*) = (l^*)^{1/2}(4l^*)^{1/2} = 2l^*$ となる．すなわち，費用最小化行動に則って x 単位を生産するには，$x/2$ 単位の労働と $2x$ 単位の原材料を使用することになる．このときの総費用関数は

$$TC(x) = \$4 \times \frac{x}{2} + \$1 \times 2x = \$4x$$

となるから，$x = 100$ を代入して，$TC(100) = \$400$ を得る．

（b）等量曲線図もしくはスプレッドシートを利用して問（a）を解いた場合には，この問題を解くにあたって，生産技術は規模に関して収穫一定であること，そしてまた 100 単位の製造コストが$400 ドルであることから生産の限界費用は一定の$4 であることを想い起こしておこう．代数的に解いている場合には，すでに総費用関数が $TC(x)=\$4x$ となることを知っているはずだから $MC(x)=\$4$ だとわかる．いずれの場合でも，限界費用が限界収入に等しくなるときに利潤最大化が達成されるという条件を適用すればよい．

逆需要関数は $P(x)=12-(x/2000)$ であるから，総収入は $TR(x)=12x-(x^2/2000)$，限界収入は $MR(x)=12-(2x/2000)=12-(x/1000)$ となる．よって $MC=MR$ より $x=8000$ を得る．これが利潤最大化の下での生産数量である．このときの価格は

$$P(8000)=12-\frac{8000}{2000}=\$8$$

となる．なお，$x=8000$ のときの各生産要素の投入量は $l=4000$，$m=16{,}000$ となる．

練習問題 9.7 の解答

生産関数が $f(k,l,m)=k^{1/2}l^{1/8}m^{1/4}$ である場合，指数部分の合計は 7/8 となる．これは 1 より小さいから，この生産技術は収穫逓減である．他の場合についても，同様に考えればよい．法則の一般的説明に関しては省略する．

練習問題 9.9 の解答

（a）図 9.15 には$200 の等費用線を描いてある．傾きを保ったまま，それを等量曲線に接するまでシフトさせてみよう．接点における各要素投入量は，原材料が 60 単位，労働が 20 単位である．総費用は次のように計算できる．

$$\$10\times 20+\$2\times 60=\$320$$

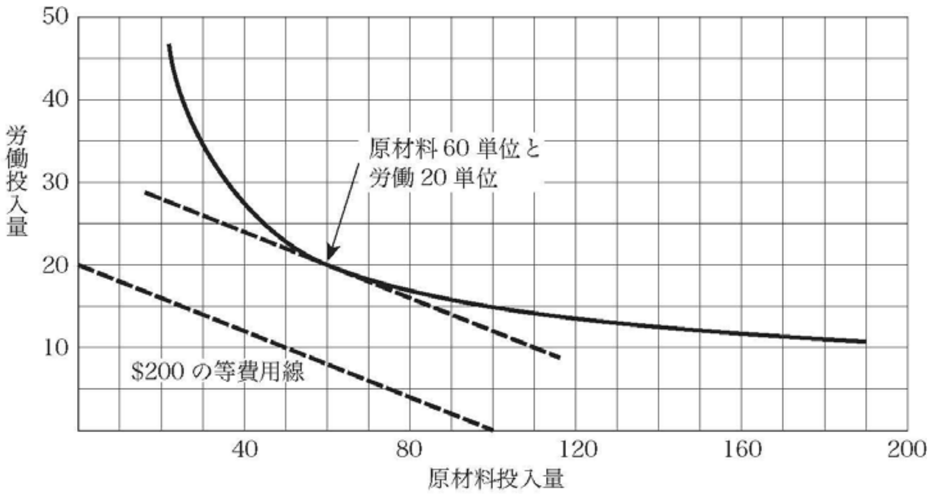

図 9.15　練習問題 9.9：10 単位の rewp をつくる最も安価な生産方法の決定

（b）生産技術が収穫逓減であるから，平均費用関数は逓増的である（より正確には，逓減しない）．産出 10 単位の平均費用は$32 であるから，産出 15 単位の平均費用は$32 以上になる．このことから，15 単位 rewp を製造する場合の総費用は$32×15＝$480 以上となる．

練習問題 9.10 の解答

限界収入は $MR(x) = 20 - (x/1500)$ である．ここで $MR = MC$ を考えればよい．いま $x \geq 333.333$ の領域で MR が MC に等しくなると予想すると，

$$20 - \frac{x}{1500} = \frac{8000 + x}{833.333}$$

が成立するはずである．これを x について解くと，$x = 5571.4284$ を得る．このときの c の値は，$c = 13571.4284 / 833.333 = 16.2857$ である．これを X_1^* と X_2^* に代入すれば，所望の値を得ることができる．

練習問題 9.12 の解答

まず水和反応-蒸留工程では，1 キログラムあたり$4 の費用で 400 キログラムのバルク・ケミカルを生産できることを確認しよう．原材料投入の上限は 1000 キログラムであり，原材料 1 キログラムあたり 0.4 キログラムの製品を製造できること，また 1 キログラムあたりの原材料価格は$1 で労働費用は$0.6 だから，単位あたり費用は$1.6 になることに留意すると，産出物 1 キログラムあたりの費用は$1.6/0.4＝$4 になるわけである．同様にして，触媒工程について考えると，結果的にこの工程では 1 キログラムあたり$5.6 の費用で 250 キログラムのバルク・ケミカルを生産できることになる．

産出 400 キログラムまでの製造工程には，水和反応-蒸留工程のみを使用すべきである．そのとき，総費用は 1 キログラムあたり$4 で単調に増加していく．400 キログラムを生産したところで，水和反応-蒸留工程は生産能力の上限に達するので，より単位あたり生産費用の高い触媒工程へ製造工程を切り替えなければならない．そうすると，1 キログラムあたりの費用は$5.6 へと上昇する．この触媒工程によって，あと追加的に 250 キログラムのバルク・ケミカルを作ることができる．

以上より，図 9.16（a）に示されているような総費用関数が得られる．400 キログラムまで傾きは一定で，その後より大きな傾きへと屈折する（650 キログラムまで）．ちょうど 650 キログラムのところで総費用関数は垂直になっているが，それは 1 操業時間あたりではもうこれ以上生産することはできないことを意味している．なお，図 9.16（b）には対応する限界費用関数が描かれている．限界費用関数は階段状になることに注意されたい．

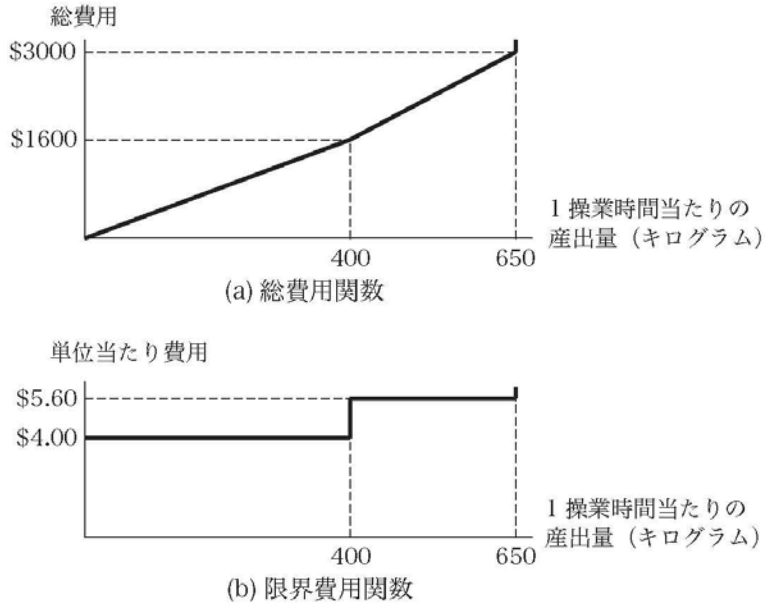

図 9.16　練習問題 9.12：総費用関数と限界費用関数

練習問題 9.15 の解答

（a）各投入要素の投入量が非負であるとの制約を除けば，ここでの最適化問題は制約条件のない最大化問題として定式化されている．よって，利潤最大化条件は，各投入要素について，目的関数を偏微分したものを 0 と置くことにより特徴付けられる．つまり，各投入要素 $i = 1,2,3$ に対して，次式が成立しなければならない．

$$MR(f(y_1, y_2, y_3)) \times MPP_i(y_1, y_2, y_3) - r_i = 0$$

TR の偏微分については，チェーン・ルールを適用して書き換えてある．この式は，投入要素 i の限界収入生産物（marginal revenue product; $MR(\bullet) \times MPP_i(\bullet)$）が，その要素価格（$r_i$）に等しくなることを意味している．すなわち，以下のようになる．

$$MR(f(y_1, y_2, y_3)) \times MPP_i(y_1, y_2, y_3) = r_i$$

先の非負制約を考慮すると，この関係式は次の不等式で表現される．

$$MR(f(y_1, y_2, y_3)) \times MPP_i(y_1, y_2, y_3) \le r_i$$

もし $y_i > 0$ なら，この式は等号で成立する．結局，所望の条件は

$$y_i \times \left[MR(f(y_1, y_2, y_3)) \times MPP_i(y_1, y_2, y_3) - r_i\right] = 0$$

（b）問題 9.5（b）において，限界収入は $MR(x) = 12 - x/1000$ であるから，まず投入要素 l についての最適条件は

$$\left(12 - \frac{l^{1/2} m^{1/2}}{1000}\right) \frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} = r_l = 4$$

整理すると

$$\left(\frac{6m^{1/2}}{l^{1/2}}-\frac{m}{2000}\right)=4$$

同様にして，投入要素 m についての最適条件は

$$\left(\frac{6l^{1/2}}{m^{1/2}}-\frac{l}{2000}\right)=1$$

最初の条件式の両辺に l を，２番目の条件式の両辺に m をそれぞれ乗じると，次の関係式が成立する．

$$4l=\left(6m^{1/2}l^{1/2}-\frac{ml}{2000}\right)=m$$

$m=4l$ を，たとえば最初の条件式に代入し，l について解くと $l=4000$ を得る．したがって $m=16,000$ である．

（c）投入要素 i の価格 r_i が投入要素の使用量 y_i に依存する場合，結果的に，先の利潤最大化条件は次のように変更される．

$$y_i\times\left[MR(f(y_1,y_2,y_3))\times MPP_i(y_1,y_2,y_3)-(r_i'(y_i)y_i+r_i(y_i))\right]=0$$

投入要素 i の価格の部分が，当該投入要素購入の限界費用に置き換わる．

練習問題 9.16 の解答

問題の設定はやや異なるものの，第 11 章および第 12 章の議論を参考にすれば，ここでの問題の大半は容易に取り組むことが可能である．ただし，問（c）については，それらの章では言及されないので，ここで取り上げることにしよう．

問題文の主張とは逆に，$q'>q$，$x'\in X_i^*(q')$，かつ $x\in X_i^*(q)$ ならば $x>x'$ が成立するとしてみよう．移転価格 q の下で，x は工場 i にとって最適なものとなるから，次の関係が成立する．

$$qx'-TC_i(x')\le qx-TC_i(x)$$

これを書き換えると

$$TC_i(x)-TC_i(x')\le q(x-x')$$

仮定より $x>x'$ および $q'>q$ であったので，$q'(x-x')>q(x-x')$ が成立する．したがって，

$$q'(x-x')>TC_i(x)-TC_i(x')$$

となる．これを書き換えると

$$q'x-TC_i(x)>q'x'-TC_i(x')$$

を得る．これは，移転価格 q' の下で，x' は工場 i にとって最適であるとの仮定に反する．このことから，$q'>q$，$x'\in X_i^*(q')$，かつ $x\in X_i^*(q)$ なら $x'\ge x$ となって，$X_i^*(q)$ は q の増加関数になることが明らかとなる．