第 4 章　需要関数

練習問題 4.1 の解答

（a）この問題を Excel とソルバーを使って解いた．図 4.3 には，最適化されたスプレッドシート PROBLEM4.1 が示されている. 価格が操作変数であることに, 注意をしてもらいたい. つまり，価格を変化させて，生産量を計算しているのである．このとき，（Excel のすばらしい特徴により）総費用が、生産量から直ちに計算される（スプレッドシートをダウンロードして，セルの定義を見て，これを確かめよう）．解は，価格$30 であり，それに対応する生産量は 40,000 単位である．

図 4.3　問題 4.1 のスプレッドシートの解

（b）この問題を，生産量に関して，解析的に解くためには，生産量の関数として，収入を表す必要がある．これは，需要関数が $D(p)=2{,}000(50-p)$ となることを意味する．この需要関数で，対応する逆需要関数は $P(x)=50-x/2{,}000$ となる．総費用は常に生産量の関数として表されるので，限界費用関数は単に偏微分をとり，$MC(x)=10$ となる．このとき，限界収入は線形かつ減少関数で，限界費用が一定となることに注意をしよう．これらの関数は，限界収入が上から下へと，一度だけ交わる．それらが交わる点は，利潤を最大化させる生産量であり，その解は以下のようになる．

$$50-\frac{2x}{2,000}=10 \quad \text{or} \quad 40=\frac{2x}{2,000} \quad \text{or} \quad x=40,000$$

この生産量を逆需要関数に代入することで，対応する最適価格 $p=\$30$ を得ることができる．

（c）この問題を価格に関して，解析的に解くためには，総収入関数を価格の関数として表すのが簡単である．これは，ちょうど $p\times D(p)$ もしくは $100,00p-2,000p^2$ となる．ここでの鍵は，価格の関数として費用を表すことである．価格 p を所与とすると，生産量は $2,000(50-p)$ となり，総費用は生産量の関数として $10,000+10x$ と表せる．したがって，価格の関数として総費用を表すと，以下のようになる．

$$10,000+10[2,000(50-p)]=1,010,000-20,000p$$

それゆえ，利潤は，価格の関数として，

$$100,000p-2,000p^2-[1,010,000-20,000p]=120,000p-2,000p^2-1,010,000$$

となり，これは 2 次項が負の係数を持つ放物線である．したがって，このような利潤関数は，偏微係数が 0 であるところで利潤が最大化されるので，その解は以下のようになる．

$$120,000-4,000p=0 \quad \text{or} \quad p=\frac{120,000}{4,000}=30$$

価格 30 を需要関数に代入すると，最適生産量 40,000 単位を得ることができる．

読者はどのように解を求めただろうか？（b）の方法だろうか，（c）の方法だろうか？多くの読者は，どちらも同じくらいに難しく感じたかもしれない．しかし，いくつかの理由により，この教科書では，常に（b）の方法を使う．その理由の 1 つは，問題 4.17 を解いてみることでわかる．もし総費用がもう少し複雑であるならば，方法（c）はより難しいものとなる．第 2 の理由は，完全競争市場の企業では，方法（c）は意味をなさない（企業は価格を所与のものとして，生産量を選択する）．読者が望むならば，このどちらかの方法で解くことができると知ることは依然として有用である．なぜならば，（c）の方法は解析的により使い勝手がいいからである．

練習問題 4.3 の解答

（a）図 4.4 は，PROBLEM4.3 のスプレッドシートを示している．これにより，求められる解を得ることができる．列 B には 11 個の価格があり，列 C はそれに対応する需要水準が計算されている．列 D は列 B の価格に 1 セントを足したものであり（価格がわずかに変化した様子を表している），列 E には，対応する生産量が示されている．そして列 E は，公式（4.1）を使って計算された弾力性である．

価格が低いときには需要が多く，弾力性が 0 に近いことになっていることに注意をしてもらいたい．線形の需要関数の中間では，弾力性は –1 となる．価格が高く，需要が少ないときには，弾力性は（負の値であるが，絶対値として）とても大きくなる．

	A	B	C	D	E	F
1						
2		価格	需要量	価格 + .01	新しい需要量	弾力性
3		$1.00	11,000	$1.01	10,990	-0.0909
4		$2.00	10,000	$2.01	9,990	-0.2000
5		$3.00	9,000	$3.01	8,990	-0.3333
6		$4.00	8,000	$4.01	7,990	-0.5000
7		$5.00	7,000	$5.01	6,990	-0.7143
8		$6.00	6,000	$6.01	5,990	-1.0000
9		$7.00	5,000	$7.01	4,990	-1.4000
10		$8.00	4,000	$8.01	3,990	-2.0000
11		$9.00	3,000	$9.01	2,990	-3.0000
12		$10.00	2,000	$10.01	1,990	-5.0000
13		$11.00	1,000	$11.01	990	-11.0000
14						

図 4. 4　需要関数 $D(p)=1{,}000(12-p)$ における弾力性の計算

これを，微分と，操作変数に価格を使って，解いてみよう．

$$\nu(p)=D'(p)\frac{p}{D(p)}=-1{,}000\frac{p}{1{,}000(12-p)}=-\frac{p}{12-p}$$

この公式で，価格を 0 に近づけていくと，弾力性も 0 に近づき，価格を 12 に近づけていくと弾力性は $-\infty$ に発散することに注意をしてもらいたい．また， $p=12-p$ のとき，つまり $p=6$ という中間地点では，弾力性は -1 となる． $p>6$ のときには，弾力性は -1 よりも小さくなり，需要は弾力的となる．そして $p<6$ のときには，弾力性は -1 よりも大きくなり，需要は非弾力的となる．

微分と，操作変数として生産量を使うと，逆需要関数は $P(x)=12-x/1{,}000$ となり，したがって，

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(x)&=\frac{1}{P'(x)}\frac{P(x)}{x}=\frac{1}{-1/1{,}000}\times\frac{12-x/1{,}000}{x}\\&=-1{,}000\frac{12-x/1{,}000}{x}=\frac{12{,}000-x}{x}\end{aligned}$$

となる．ここで， x は 0 から 12,000 までの間の値をとる．生産量 x を 0 に近づけると，弾力

性は負の大きな値をとり（需要が非常に弾力的），生産量 x を 12,000 に近づけると，弾力性は 0 に近くなる（需要が非常に非弾力的）．需要関数の中間地点である $12,000-x=x$，つまり $x=6,000$ のときには，弾力性は –1 となる．さらに，$x<6,000$ のときには弾力性が –1 を下回り（弾力的な需要．正の限界収入），$x>6,000$ のときには弾力性が –1 を上回る（非弾力的な需要．負の限界収入）．

（b）問題（a）で観察したパターンは，すべての線形需要関数で成り立つ．はじめに，関連する公式を書き下そう．

$$v(p)=\frac{Bp}{A-Bp},\ \hat{v}(x)=\frac{A-x}{x},\ MR(x)=\frac{A-2x}{B}$$

価格が高く，生産量が低いときには（$p>A/(2B), x<A/2$）需要は弾力的（–1 よりも小さい）で，限界収入は正となる．需要関数の中間地点，つまり $p=A/(2B), x=A/2$ のとき，限界収入は 0 となり，弾力性は –1 となる．そして生産量が高く（$x>A/2$），価格が低い（$p<A/(2B)$）ときには，需要は非弾力的になり，限界収入は負となる．

線形需要関数の例はたくさんあり，最後のパラグラフの図で示した要約は今後も役に立つだろう．図 4.5 を見てもらいたい．

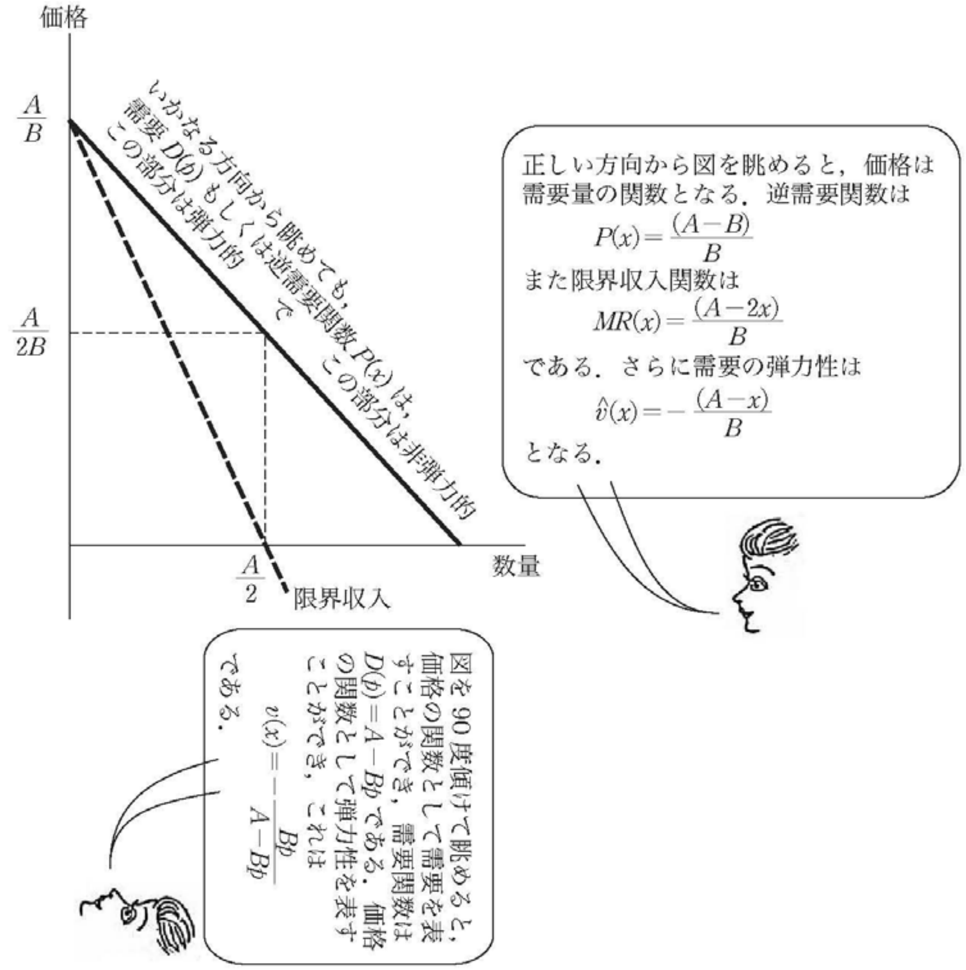


図 4.5　線形の（逆）需要関数のケース　全ての線形の（逆）需要関数（読者は今後数多く出会うことになろう）は，弾力性が同一の性質をもつ．つまり，中間地点では弾力性は -1 となり，価格が高く需要量が小さいときには弾力的になり，価格が低く需要量が大きいときには非弾力的になる．

練習問題 4.4 の解答

（a）価格が$8.00 から$0.10 下落すると，これは $0.1/8=0.0125=1.25\%$ の価格の下落となる．この問題では価格が 1%変化すると，生産量は 3%変化するとなっている．つまり，弾力性は –3 となる．したがって，この価格が 1.25%下落すると，販売量が 3.75%増加することを意味する．10,000 単位の 3.75%は 375 単位である．したがって，販売量は 10,375 まで増加するだろう．

それゆえ、総収入は，以前は$80,000（$\$8\times 10{,}000$ 個）であったが，これが $\$7.90\times 10{,}375=\$81{,}962.50$ となり，$1,926.50 の増加となる．

（b）10,000 単位から，販売量が 150 単位下落すると，これは 1.5%の下落となる．したがって，弾力性が –3 であるときには，これは価格が 0.5%の価格の上昇を意味する．1 個当たり

の価格が$8.00 から，価格は$0.04 上昇する．総収入は，$80,000 から，$\$8.04\times 9,850=\$79,194$ となり，$806 の下落となる．

別の方法として，公式を使うと，

$$\frac{dTR(x)}{dx}=P(x)\left[1+\frac{1}{\hat{v}(x)}\right]$$

問題で扱っている数値の場合，これは，

$$\frac{dTR(x)}{dx}=8\left[1+\frac{1}{-3}\right]=\frac{16}{3}$$

それゆえに，150 単位下落すると，総収入の変化は

$$\frac{16}{3}(-150)=-\$800$$

つまり$800 の下落である．

まったく同一の解ではないが（2 つの方法は，微分法からの離散的限界量を近似する），どちらをつかっても，予想変化量が小さいときには，よい指針となる．

練習問題 4.7 の解答

価格を$12.50 に下がったときに，企業が 1 ヶ月に販売する個数を見つけることが鍵となる．ここで与えたデータでは，弾力性が –2.5 という一定の弾力性をもつ需要関数，つまり価格が$14 のときには需要は 30,000 になる．つまり，方程式 C について解くと，

$$30,000=C\times 14^{-2.5}$$

つまり，約 $C=22,000,945$ で，$D(\$12.50)=22,000,945\times 12.50^{-2.5}=39,826$ となる．したがって，生産と販売が 1 ヶ月で 9,826 上昇する．この結果から，総収入と総費用，2 つの価格$14 と$12.50 での利潤を簡単に計算できる．数学的に，利潤が$4,130 まで上昇するか確認しなさい．

このやり方は，読者にとっては少し巧妙に感じるかもしれない．したがって，別のやり方で近似解を求めることにしよう．まず，価格が$14 から$12.5 まで下がったときの，生産量と販売量を計算しなければならない．つまり，価格が$1.50 下がると，これは$14 を基準にすると，$1.5/14=0.107=10.7\%$ の変化率である．弾力性が –2.5 であると，価格が 1%下がると，生産量が 2.5%上昇するので，価格が 10.7%下がると，生産量は 26.8%上昇する．生産量が 30,000 であると，これは 8,040 個の増加をもたらす．

最初で行った方法では，販売量は約 10,000 個の上昇となる．ところが，ここでは，8,040 個の上昇としか，解として得ていない．なぜこのような差が出てくるのだろうか．その理由は，$14.00 から$1.50 の価格の下落を基準にして，計算したことによる．このとき，$12.50 から価格が$1.50 上昇すると，これは 12%の変化となる．そして（弾力性が –2.5 であるので）生産量は 12%の変化となる．生産量が 30,000 個から 30%下落するような生産量 x，つまり $0.7x=30,000 \quad \text{or} \quad x=42,857$ を探している．つまり，$12.50 と%変化をもとにした未知の数

量を計算するとき，過剰に評価し，12,857 の生産量変化としてしまうのである．

価格が範囲内にあるときに，弾力性が –2.5 にとどまる範囲では，最初で行った巧妙な計算方法では，完全に正しい解を導いてくれる．しかし，2 つの近似解であっても，それほど悪い近似ではない．そして，どちらか 1 つを用いれば，利潤の変化を比較的簡単に計算できる．

練習問題 4.9 の解答

総需要を求めるには，各グループの需要関数が必要となり，それゆえに最初のステップは，各逆需要関数の逆関数を求めることである．

- 若年者グループでは， $P_y(x_y) = 10 - x_y/1{,}000$ となる．（このような例では，すべて標準的であるが）価格が 10 を超えると，このグループの需要は 0 になるものと仮定しよう．価格が 10 から 0 までの間で，需要が存在する．そして， $p = 10 - x_y/1{,}000$ を x_y について解くと， $D_y(p) = 1{,}000(10 - p)$ となる．
- 同様にして，壮年者グループの需要は，価格が 15 よりも大きくなると 0 になり，価格が 15 から 0 の間にあるときには， $D_m(p) = 2{,}000(15 - p)$ となる．
- 高齢者の需要は，価格が 12.5 よりも大きくなると 0 になり，価格が 12.5 から 0 の間にあるときには， $D_s(p) = 800(12.5 - p)$ となる．

総需要は，これら 3 つのグループの需要関数の合計となる．価格が 15 よりも高いと，どのグループの需要も 0 になる．そして価格が 15 から 12.5 までの間では，壮年者グループのみが購入し，12.5 から 10 の間では壮年者と高齢者グループが，そして 10 から 0 の間ではすべてのグループが購入する．したがって，総需要は，

$$D(p) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p > 15 \\ 2{,}00(15-p) & \text{if} \quad 15 \ge p > 12.5 \\ 2{,}000(15-p) + 800(12.5-p) & \text{if} \quad 12.5 \ge p > 10 \\ 2{,}000(15-p) + 800(12.5-p) + 1{,}000(10-p) & \text{if} \quad 10 \ge p \ge 0 \end{cases}$$

となる．これを整理すると

$$D(p) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p > 15 \\ 30{,}000 - 2{,}000p & \text{if} \quad 15 \ge p > 12.5 \\ 40{,}000 - 2{,}800p & \text{if} \quad 12.5 \ge p > 10 \\ 50{,}000 - 3{,}800p & \text{if} \quad 10 \ge p \ge 0 \end{cases}$$

となる．読者にとっては，価格の範囲の定義で，$\ge$ や $>$ の使い方に戸惑うかもしれない．各価格の間で需要関数は連続であるので，これはそれほど重大な問題ではない．

次に，逆需要関数の問題を解いていこう．これを求めるために，今計算した需要関数の逆関数を計算する．最初に， $p = 0$ のときには，需要は 50,000 単位なるので，これは販売量の上限となる（つまり，逆需要関数を書き下すさいに，需要が 50,000 より高いときには価格が 0 となる）．次に，数量が 0 から 50,000 までに対応する価格の範囲は，15 から 12.5,

12.5 から 10，そして 10 から 0 になるので，これらを分けて考える．価格 12.5 と 10 を需要関数に代入すると，$D(12.5)=5,000$ と $D(10)=12,000$ を得ることができる．したがって，生産水準が 0 から 5,000 のときには，需要は $30,000-2,000p$ となり，逆需要関数は $P(x)=15-x/2,000$ となる．生産水準が 5,000 から 12,000 までのときには，需要関数は $40,000-2,800p$ であるので，逆需要関数は $P(x)=40,000/2,800-x/2,800=14.2857-x/2,800$ となる．生産水準が 12,000 から 50,000 までの間では，需要関数は $50,000-3,800p$ であるので，逆需要関数は $13.1579-x/3,800$ となる．これらをまとめると，以下のようになる．

$$P(x)=\begin{cases}15-x/2,000 & \text{for} \quad 5,000\geq x\geq 0\\ 14.2857-x/2,800 & \text{for} \quad 12,000\geq x>5,000\\ 13.1579-x/3,800 & \text{for} \quad 50,000\geq x>12,000\\ 0 & \text{for} \quad x>50,000\end{cases}$$

練習問題 4.10 の解答

2 つのグループの需要関数が与えられているので，これからすぐに総需要関数を以下のように書くことができる．

$$D(p)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad p>20\\ 5,000(20-p) & \text{if} \quad 20\geq p>14\\ 5,000(20-p)+10,000(14-p)=24,000-15,000p & \text{if} \quad 14\geq p>0\end{cases}$$

図 4.6 では，需要関数が実線で描かれている．しばらくの間，破線を考えないものとしよう（この描かれた需要関数が本当に役に立つものであることを，すぐ後に知ることになる）．価格が 14 のときに需要関数が屈折することに，十分に注意をしてもらいたい．さらに，この価格のときに需要量が 30,000 になることも注意してもらいたい．

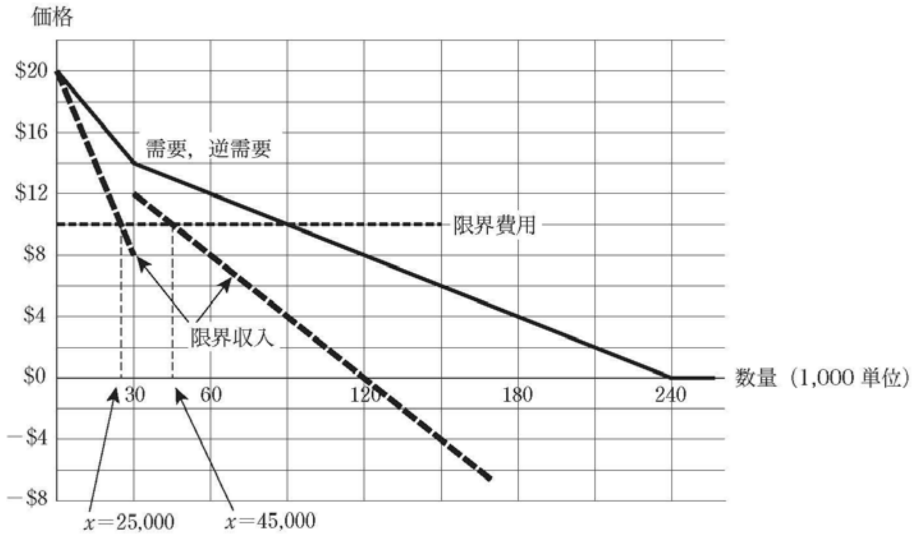


図 4.6　練習問題 4.10 を図示したもの　屈折した実線は，需要関数もしくは逆需要関数である．この需要関数から直ちに限界収入関数を導くことができる（太い破線で描かれている）．限界収入は需要量が 30,000 でジャンプすることに注意をされたい．このときの価格は$14 で，需要関数も屈折する．限界費用は一定で$10 であり，細い破線で描かれている．限界収入と限界費用は 2 度交わっているので（ジャンプも数えるならば 3 回），利潤を最大化する需要量は二つの候補がある．本文中にその解法が記述されている．

利潤最大化問題を解くためには，微分法か Excel とソルバーどちらかを使うことができる．そして，Excel とソルバーでは，論理式と制約を使う 2 つの方法がある．Excel とソルバーを使う 2 つの方法から解説しよう．

問題のスプレッドシートは，PROBLEM 4.10 となる．図 4.7(a)で示された，シート 1 から始めよう．セル B1 には，価格$12 が表示されている．セル B2 には需要が与えられており，これが鍵となる変数である．Excel においては，以下の公式が用いられている．

$$= \mathrm{IF}(\mathrm{B1} > 14, 5{,}000 * (20 - \mathrm{B1}), 240{,}000 - 15{,}000 * \mathrm{B1})$$

つまり，エクセルでは価格を与えると，価格が$14 を超えるかどうかに依存して，2 つの公式の 1 つを用いて，需要量を計算する．セル B3 には，限界費用が$10 と一定であるという事実と，公式$= (\mathrm{B1} - 10) * \mathrm{B2}$を用いて利潤が計算されている（限界費用が$10 と一定である一方で，企業は非ゼロの固定費用の可能性があることを，問題は放棄していない．もし非ゼロの固定費用が存在するならば, 固定費用が計算に含まれていないことから, B3 の数値は, 総固定費用となる）．

B3 を最大化させるために, ソルバーを起動してセル B1 を変化させよう. そして, 図 4.7(b)に示された解を得ることができるだろう. 利潤を最大化させる価格は$13, 販売量は 45,000, そして利潤は$135,000 となる（読者がこの問題を自分自身で解いて，ソルバーが導いた解が$15 であっても，落胆する必要はない．これはソルバーのエラーであって，読者の責任ではない．これについては後で少し説明しよう）．

（a）最適化前　　　　（b）最適化後

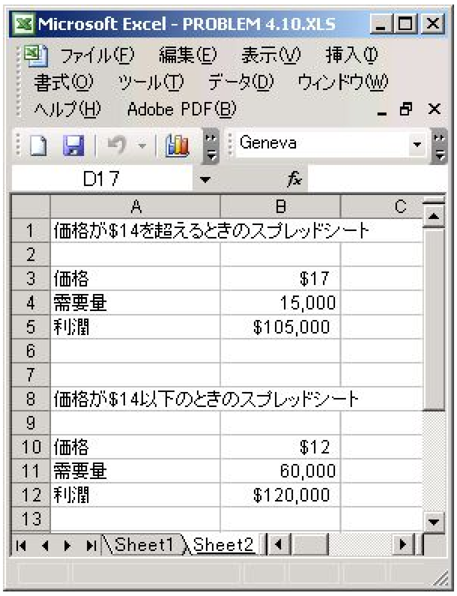
図 4.7　論理式とエクセルを使って問題 4.10 を解く　この図には，論理式を使ったエクセルファイル，スプレッドシート PROBLEM 4.10 のシート 1 が示されている．ここで鍵となるのは，価格（セル B1 の値）が$14 よりも大きいか小さいかというテストをする，セル B2 の論理式である．パネル a には，価格が$12 のときの初期値が与えられたスプレッドシートが示され，パネル b は，ソルバーが価格を変化させて，利潤を最大化させた後のスプレッドシートになる．

Excel を使って，制約を伴う問題を解くためには，図 4.8(a)で示された，PROBLEM 4.10 のシート 2 に移ってもらいたい．3 行目，4 行目，5 行目には，価格，需要量，利潤が示されている．ここで，$14 を超える価格に対応する需要関数の公式を用いて，需要が計算されている．10 行目，11 行目，12 行目には，価格と需要量，利潤があり，11 行目を除いて，価格の関数として需要量を計算する公式は，価格が$14 以下のときのものとなっており，これは$=5{,}000(20-\mathrm{B10})+10{,}000(14-\mathrm{B10})$である．スプレッドシートの上のケースでは，初期値として$17 が与えられており，下のケースでは$12 が与えられている．

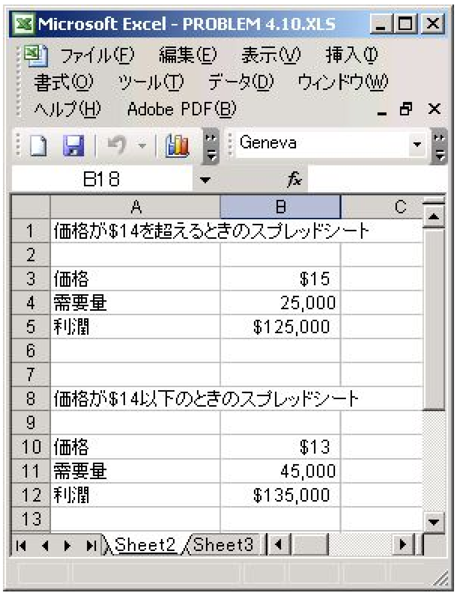
ソルバーを起動して，最大化を行ってみよう．ここで鍵となるのは，スプレッドシートの上のケースでは，*B3 が$14 以上という制約の下*，B3 を変化させて B5 を最大化することである．そして，B10 が$14 以下という制約の下，B10 を変化させて，B12 を最大化するようにソルバーを設定する（学習の手引きの第 1 章の最初では，1 回しかソルバーを使わずに，問題を解いていた．しかし，そこでの例では，制約を明示的には課さなかった．したがって，より説明が明瞭になったと思う）．解は，図 4.8 のパネル b で示される．価格が$14 以上という制約があるならば，$15 が最適解となる．価格が$14 以下という制約のときには，$13 が最適となる．大域的な最大値は，$13 である．なぜならば，この価格の下では，$14 よりも利潤が大きくなる．2 つの方法は納得できるものであろう．

（シート 1 で，ソルバーが$15 という解を返す理由については，その説明はまだ保留して

おこう．将来的に説明するつもりであるが，この問題を次に解析的に解くための助けとはなる.）



(a) 初期値



(b) 最適解

図 4.8 制約を伴う問題 4.10 をエクセルで解く この図には，スプレッドシート PROBLEM 4.10 のシート 2 が描かれており，制約条件がある問題 4.10 を解いたものである．需要が 1 増減したときの公式を得るために論理式を使うのではなく，価格が$14 を超えるときのケースと，価格が$14 以下のときのケース 2 つを設定して考える．最適化するさいに，ソルバーを用いて，上のケースでは価格が$14 より大きいという制約を置き，下のケースでは価格が$14 以下という制約を

置いて，最適化を行う．パネル a には，価格の初期値として$17 と$12 が与えられている．一方でパネル b では，ソルバーを用いて，制約条件の下で，価格を変化させて，利潤を最大化している．

微分法を使って，解析的に解くためには，$MC = MR$ という条件を用いる．限界費用は$10 と一定である．ここで，限界収入関数とは何であろうか？限界収入関数を求めるために，まず逆需要関数を求める．したがって，需要関数に立ち戻り，問題 4.9 での解で使ったものとまったく同じ方法で，1 つずつ，この逆関数を求める．需要量が$30,000 に対応する価格は$14 である．したがって，逆需要関数は以下のようになる．

$$P(x) = \begin{cases} 20 - x/5,000 & \text{if} \quad 0 \le x < 30,000 \\ 240,000/15,000 - x/15,000 = 16 - x/15,000 & \text{if} \quad 30,000 \le x < 240,000 \\ 0 & \text{if} \quad x > 240,000 \end{cases}$$

x と逆需要関数の積から，総収入は以下のようになる．

$$TR(x) = \begin{cases} 20x - x^2/5,000 & \text{if} \quad 0 \le x < 30,000 \\ 16x - x^2/15,000 & \text{if} \quad 30,000 \le x < 240,000 \\ 0 & \text{if} \quad x > 240,000 \end{cases}$$

したがって，限界収入は上の式を微分することで得られ，

$$MR(x) = \begin{cases} 20 - 2x/5,000 & \text{if} \quad 0 < x < 30,000 \\ 16 - 2x/15,000 & \text{if} \quad 30,000 < x < 240,000 \\ 0 & \text{if} \quad x > 240,000 \end{cases}$$

となる．上の式を注意深く眺めると，限界収入を書き下すさいに，x のとりうる範囲で$\ge$や$>$を混ぜて使っていたのを，$>$に統一したことに気づくだろう．逆需要と総収入では，どちらの不等号を使おうと大きな差異はなかった．なぜならば，逆需要も総収入も $0 \le x < 30,000$ のような生産量の範囲では，連続関数であるからである．しかし，逆需要も総収入も連続関数ならば，例えば $x = 30,000$ で屈折し，それゆえ厳密に述べるならば，総収入の微分である限界収入は，その生産量では定義できないのである．

もし数学の話で戸惑ったならば，逆需要と同じ図に，計算した限界収入を図示してみよう．これは図 4.6 で示されている．限界収入は，太い破線で示されている．限界収入は，30,000 でジャン撫していることに注意をしてもらいたい（さらに $x = 240,000$ で 0 までジャンプしているが，この点はさほど重要ではない）．このジャンプは，総収入が屈折していることから生じている．需要量が 30,000 より下の領域では，限界収入は約$8 であるが，30,000 から 30,001 に増えると，総収入は$12 まで突然上昇する．

ここで，$10 と一定の限界費用を重ねてみよう．これは，図 4.6 では，細い破線で描かれている．限界費用と限界収入は 2 回交わることに注意をしよう．最初の交点は，$20 - 2x/5,000 = 10$ で，この解は $x = 25,000$ となる．この点では，限界収入は限界費用と上から下へ交わる．$x = 30,000$ で，限界収入を下から上へと「ジャンプ」する．そして，

$16-2x/15,000=10$，つまり $x=45,000$ で，限界収入は再び上から下へと限界費用と交わる．

このすべての点で，利潤はどのような意味を持つのだろうか？限界収入は限界費用よりも高いところから始まるので，当初，利潤は増加する．交点 $x=25,000$ まで利潤は上昇し，この点を境に，再び利潤は減少する．それゆえ，$x=25,000$ は利潤の局所的最大値である．利潤は $x=30,000$ まで減少し，ここで限界収入は突然ジャンプする．利潤は突然方向を変え，再び上昇し始める．そして，$x=45,000$ まで上昇し続ける．この点を境に利潤は減少することになる．なぜならば，限界収入はこれ以降の生産水準では，限界費用を上回ることはなく，利潤は減少し続けるからである．それゆえに，$x=45,000$ は 2 番目の局所的最大値である．

利潤を最大化する生産水準とはどのようなものであろうか？それは $x=25,000$ か $x=45,000$ のどちらかであり，2 つの中から 1 つを選択する唯一の方法は，2 つの水準での利潤を評価することである．はじめに，これらの生産水準に対応する価格を計算する．$x=25,000$ のときの価格は$15 であり，$x=45,000$ のときは$13 である．次に，対応する利潤は，$25,000(15-10)=\$125,000$ と $45,000(13-10)=\$135,000$ である．第 2 の交点が，より大きな利潤をもたらすことは明らかであろう．

ここで，2 つの留意点を述べておこう．

1. 問題 3.6 でおこなった論点に戻り, 図 4.6 の図をよく考察すると, 計算などしなくても，第 2 の交点が利潤を最大化させるものであるという，明白な事実に気づくだろう．
2. 先ほど，論理式と Excel を使うという第 1 の方法は，ソルバーを起動させると，少なくとも価格が$15 のときには誤りを犯してしまうと述べた. 事実, Excel を使い, PROBLEM 4.10 のシート 1 を，初期値を$12 ではなく，$15.10 にすると，ソルバーは$15 を解として導く．ソルバーは，（最大化ならば）目的関数を増加させる方向を探して山登りを行い，大域的最大値ではない局所的最大値の近傍に初期値を設定すると，局所的最大値に容易に陥ってしまう．

現実の世界では，限界収入関数は増加関数であろうか？

先ほどの興味深い特徴は，需要関数と逆需要関数が屈折するため，限界収入がジャンプすることであった．これは，究極的には，$MC=MR$ の解が複数存在することを意味する．しかし，これはあくまでもおもちゃのような例での出来事である．限界収入が少なくともある範囲では増加するので，読者は，現実世界に応用するさいに，$MC=MR$ の解が複数あるかと心配になるかもしれない．

これが起こる可能性を捨てきることはできない．企業が提示する価格の近傍での需要関数を知っていたとしても（つまり，企業が直面する需要関数の弾力性が既知であるとしても），企業は大域的最大値よりもむしろ局所的最大値での価格と需要量に陥っているかもしれないのである．どのような状況であろうか.

公式（4.2）は，限界収入が価格と弾力性に依存していることを述べている．もちろん，価格は（一般的には）需要の減少関数である．しかし，需要が増えるにつれ，弾力性は劇的かつ様々な方向に変化する．とりわけ，少なくともある財については，需要はある特定の需要量の範囲では，かなり非弾力的になったり，需要が高くなるととても弾力的になり，そして非弾力的になったりもする．需要が非弾力的になるところでは，公式（4.2）では，限界収入が負になる．したがって，このパターンでは，限界収入は負になり，次に正になり，再び負となるのである．これは負の傾きをもつ限界収入とは一致していない．

このような例を，教科書では取り扱っている．この教科書で，出版社の価格付け戦略議論したときに，同じような教科書よりも相対的に高い価格をつけるならば，販売の大部分は図書館向けのものになると述べた（多くの出版社があると仮定する）．この価格では，教科書は講義で採用されるには高すぎるものとなってしまう．この種の教科書は，おおよそ$20 程度の範囲で販売される．なぜならば，他の競合相手が設定している価格の範囲内であるからである．価格がこの範囲にあるならば，教科書は講義向けに採用され，筆者と出版社の思惑通りに，かなりの売り上げとなる．この範囲の最も低い価格を下回るならば，価格を下げても売り上げが伸びないことを出版社は悟る．そして，価格がひとたび「合理的な」範囲にあったので，講義担当者は，おそらくより低い教科書を講義に採用しないこともある．もちろん，価格が低ければ販売はある程度まで増加する．学生は古いコピーよりも新しいコピーを購入するだろう．そしてノートの売り上げが伸びるかもしれない．しかし，売り上げの大部分は教科書としてなので，教科書を価格付けする最大の鍵は，「合理的な」範囲に価格を設定することである．

これは，価格付けに関することでよく使われる言い回しである．しかし，価格と需要が他方の限界関数である限り，弾力性で述べたパターンが示唆される．つまり，価格がある範囲を超えるもしくは下回る状況で需要が非弾力的であるならば，本質的にはこの範囲では需要は弾力的になるのである．

この例を導入したことで，2 つの点を指摘できる．

1. 標準的な価格の範囲を下回るときに，需要が非弾力的であり続ける教科書の出版社にまだ納得したわけではない．（本教科書を出版した）2000 年では，アメリカでの教科書の価格は$80 から$100 の間であった．$80 をわずかに下回る価格はそれほど売り上げを増加させないと譲歩せざるをえなかった．つまり，需要は例えば$70 から$80 の間ではおそらくかなり非弾力的なのである．しかし，需要は価格が$30 から$50 の間では，とても弾力的であると考えている．なぜならば，この範囲では，学生は教科書を持つ傾向にあり，したがって新しい販売は，中古の販売を置き換えるからである．残念ながら，教科書出版社はそのような劇的な実験を実施しようとはしなかった．もしこれが正しければ，Excel でみたように，出版社は局所的最大値にとどまっている状況なのかもしれない．
2. ここで行ってきた利潤最大化の問題では，企業は設定する価格と販売量の関係が既知

であると仮定した．実際，これは本章で観察したことに基づき，問題 4.1 でさらに補足した．そして企業が利潤を最大化する価格や，利潤を最大化させる需要量を選択するかどうかは，本章でのモデルでは問題とはならなかった．特定の状況では，たとえ近似としてでさえ，これは真実ではない．新しい教科書では，講義での採用数は未知であるので，出版社は何冊販売できるかについては不確かである．これは，出版社は本章の概念を使うことができないことを意味しているのだろうか？決してそのようなことはない．需要量が不確かであっても，出版社は弾力性が価格とともに変化するさいの調整方法を有していると信じている．新しい教科書を販売する出版社にとって，価格と需要量は，操作変数の役割として等しいものではない．出版社が知っていること，もしくは少なくとも出版社が知っていると考えていることを所与とすると，需要量には多少目をつぶったまま，利潤を最大化する（と信じている）価格を喜んで設定するだろう．

練習問題 4.12 の解答

（a）ここでは，3 つの価格の範囲を考察しなければならない．価格が$15 よりも大きいと，企業は 1 単位も販売しない．価格が$10 から$15 までであると，高齢者のみに，女性 1,000 人あたり $250(15-P)$ を販売する．この市場には高齢者の女性は，25,000 人存在する．したがって，総販売量は，$25\times 250(15-P)=6,250(15-P)$ である．最後に価格が$10 を下回ると，企業は高齢者の女性に $25\times 250(15-P)=6,250(15-P)$ 販売し，若年者の女性には $40\times 500(10-P)=20,000(10-P)$ 販売する．したがって，総販売量は，

$$6,250(15-P)+20,000(10-P)=293,750-26,250P$$

したがって，この企業が直面する需要関数は

$$D(P)=\begin{cases}0 & \text{for}\quad P>15\\ 93,750-6,250P & \text{for}\quad 10<p\le 15\\ 293,750-26,250P & \text{for}\quad P\le 10\end{cases}$$

（b）この問題を解くに当たって，価格$8 で 4 つのグループそれぞれに対して，販売水準を解かなければならない．

- 15-20 歳の女性のグループには，企業は $25\times 600=15,000$ 単位販売する．
- 21-25 歳の女性のグループには，企業は $15\times 500=7,500$ 単位販売する．
- 26-30 歳の女性のグループには，企業は $10\times 600=6,000$ 単位販売する．
- 31-35 歳の女性のグループには，企業は $5\times 300=1,500$ 単位販売する．

したがって，価格が$8 のときの総販売量は $15,000+7,500+6,000+1,500=30,000$ である．

価格が$8.16 のときの（近似）販売水準を見つけるためには，$8 のときの総需要の弾力性を計算する必要がある．これを行うために，総需要の弾力性は，各需要の弾力性の加重平均であることを思い出そう．総需要は 30,000 であるので，これは，

$$
\begin{aligned}
\nu(P) &= (-1)\frac{15,000}{30,000} + (-1.2)\frac{7,500}{30,000} + (-1.5)\frac{6,000}{30,000} + (-2)\frac{1,500}{30,000} \\
&= (-1)(0.5) + (-1.2)(0.25) + (-1.5)(0.2) + (-2) + (0.05) \\
&= -0.5 - 0.3 - 0.3 - 0.1 = -1.2
\end{aligned}
$$

である．$P = 8$のときの全人口の需要弾力性は–1.2 である．それゆえに，価格が\$8 から\$8.16 まで上昇したならば，これは 2%の増加であるので，需要は約 $(2\%)(1.2) = 2.4\%$ 減少する．また $P = 8$ のときの需要量は 30,000 であるので，価格が\$8.16 まで上昇するときには，需要は $(30,000)(0.024) = 720$ 単位減少し，最終的に 29,280 となる．

（c）価格が\$8 は低すぎる．ここでは以下の公式を使う．

$$
MR(x) = P(x)\left(1 + \frac{1}{\hat{\nu}(x)}\right)
$$

価格が $P(x) = \$8$ のとき，企業は 30,000 単位販売し，価格と需要量の組み合わせが –1.2 である需要弾力性を予測している．限界収入は，

$$
MR(30,000) = 8\left(1 + \frac{1}{-1.2}\right) = 8 \times \frac{1}{6} = \$1.333
$$

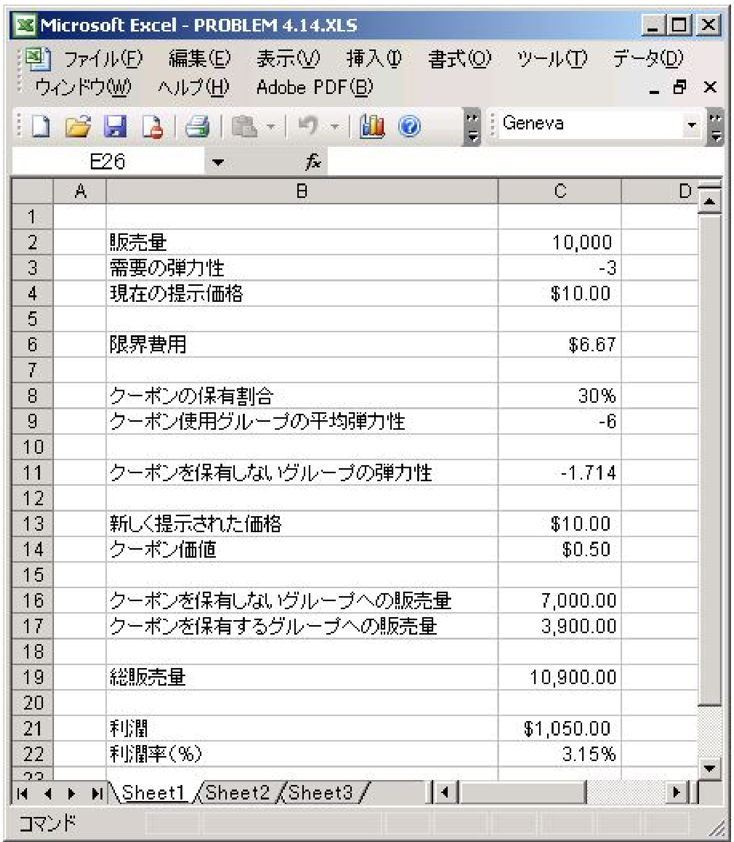
これは，限界費用\$2 よりも低い．限界費用関数は\$2 と一定で，限界収入関数は需要量が増加するにつれて下落すので，企業は利潤を最大化するためには，限界収入が\$2 となる水準まで生産を引き下げなければならない（大企業であり，企業は一定の需要弾力性を持っているならば, 解は $2 = p(1 + 5/-6)) = p/6$, つまり $p = \$12$ となる.しかし価格が変化するときに，この大企業の需要の弾力性が一定であることを保障することはできない.）．生産量を引き下げることで，価格は上昇する．つまり，価格\$8 は，利潤最大化の観点からは低すぎるのである．

練習問題 4. 14 の解答

スプレッドシート PROBLEM 4.14 のシート 1 は，最初の問題のため初期値が与えられており，これは図 4.9 で示されている．列 B には，項目名が記載されており，列 C には様々な初期値が与えられている．列 C の論理式を調べるために，スプレッドシートをダウンロードしよう．図 4.9 から，提示された価格が\$10 で，クーポンは\$0.50 が与えられており，利潤は\$1,050 で利潤の変化率は 3.15%である．

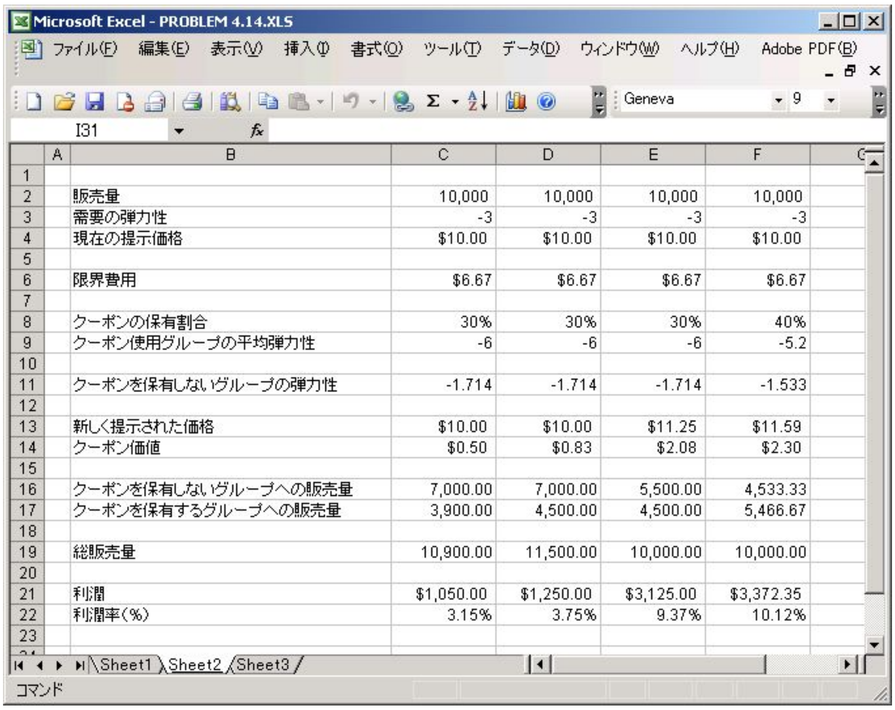
図 4.10 には，スプレッドシートのシート 2 があり，列 C 以降の 4 つの列には，シート 1 の値が「コピー」されている．4 つの列の最初の列（列 C）には，図 4.9 で与えられた結果を引き続き記しており，これに続く列 D から列 F には，ソルバーを使って，（1）クーポンの価値を最大化する，（2）提示価格とクーポン価値を最大化する，（3）クーポンプログラムの仮定を変更し，提示価格とクーポン価値を最大化する（問題（d））．計算は自分自身で行ってもらいたいが，そのまえにここでは 2 つの注意点を述べておこう．

- 提示価格とクーポン価値双方を最大化するときに，総販売水準は変化しない．需要量の離散的変化が価格の離散的変化をもたらす需要量を見つけるさいに，これは数学的に好奇心をもつかもしれない．なぜこのようなことが起こるのか心配する必要も，クーポンありとなしのグループの（逆）需要関数が完全に特定化したにも関わらず生じてしまったと考える必要もない．
- 2 番目のクーポンプログラムで，改善するかどうかは，事前には明らかでない．なぜならば，クーポンを使う市場が 50%に近づき，これはよいことだけれども，クーポンを保有するグループの弾力性は，2 つのグループの弾力性の-3 に近づくので，利潤を失うかもしれない．実際に，2 番目のクーポンプログラムの値では，人口の 40%がクーポンを保有し，そのグループの弾力性は（-5.2 の代わりに）-5.1 となるならば，最適化されたプログラムでは，利潤は 9%しか増加しない．これは，30%の人々がクーポンを保有する第 1 のプログラムよりも，利潤が減少している．


Microsoft Excel - PROBLEM 4.14.XLS

	A	B	C	D
1				
2		販売量	10,000	
3		需要の弾力性	-3	
4		現在の提示価格	$10.00	
5				
6		限界費用	$6.67	
7				
8		クーポンの保有割合	30%	
9		クーポン使用グループの平均弾力性	-6	
10				
11		クーポンを保有しないグループの弾力性	-1.714	
12				
13		新しく提示された価格	$10.00	
14		クーポン価値	$0.50	
15				
16		クーポンを保有しないグループへの販売量	7,000.00	
17		クーポンを保有するグループへの販売量	3,900.00	
18				
19		総販売量	10,900.00	
20				
21		利潤	$1,050.00	
22		利潤率(%)	3.15%	

図 4.9　スプレッドシート PROBLEM 4.14



Microsoft Excel - PROBLEM 4.14.XLS

	A	B	C	D	E	F
1						
2		販売量	10,000	10,000	10,000	10,000
3		需要の弾力性	-3	-3	-3	-3
4		現在の提示価格	$10.00	$10.00	$10.00	$10.00
5						
6		限界費用	$6.67	$6.67	$6.67	$6.67
7						
8		クーポンの保有割合	30%	30%	30%	40%
9		クーポン使用グループの平均弾力性	-6	-6	-6	-5.2
10						
11		クーポンを保有しないグループの弾力性	-1.714	-1.714	-1.714	-1.533
12						
13		新しく提示された価格	$10.00	$10.00	$11.25	$11.59
14		クーポン価値	$0.50	$0.83	$2.08	$2.30
15						
16		クーポンを保有しないグループへの販売量	7,000.00	7,000.00	5,500.00	4,533.33
17		クーポンを保有するグループへの販売量	3,900.00	4,500.00	4,500.00	5,466.67
18						
19		総販売量	10,900.00	11,500.00	10,000.00	10,000.00
20						
21		利潤	$1,050.00	$1,250.00	$3,125.00	$3,372.35
22		利潤率(%)	3.15%	3.75%	9.37%	10.12%
23						

図 4.10　PROBLM 4.14 のシート 2：問題の解

ここで，3 点述べたいことがある．

1. このスプレッドシートを複数のクーポンプログラムを適用させることは比較的簡単である．つまり，人口のある割合は高いクーポンの割引率で，別のグループは低い割引率となるようなケースである．
2. 得られた解は，少なくとも利潤率がこれらのパラメーターに敏感でない限り，元の販売量や提示価格には依存しない．この問題で需要な計算は，すべてパーセントの観点でなされている（クーポンの割引率を何パーセントにすべきであろうか？提示価格は何パーセント上昇するだろうか？利潤率は何パーセントになるだろうか？）．そしてこれらの数値は，最後の行に記載されている．
3. 最適なクーポン計画の「影響力」を決定するのに鍵となる数値は，需要全般の弾力性，クーポンを得ることのできるグループの割合，そしてそのグループの弾力性である．もちろん，これらはすべてマーケティングに従事する人々の「当て推測」であり，これらの需要量が誤ってもたらす利潤率が，どの程度敏感か心配になるかもしれない．これは，問題を解決するのには，十分すぎるほど容易である．例えば，人口の 30%がクーポンを保有し，全人口の弾力性は-3 で，クーポンを保有するグループの弾力性は-6 と，マーケティング会社が予測していると仮定しよう．このとき，最適な値を用いたならば，利潤（と販売）がどの程度影響されるのか，把握することができる．しかし，これらのパラメーターのいずれかは変化する．例えば，図 4.11 では，クーポン所有者が全人口の 40%で，弾力性が-5 であるならば，利運は約 8%まで上昇し，またもし弾力性が-6 のクーポン所有者が全人口の 20%ならば，利潤は約 3%まで下落するという結果

を示しただろう．より注意深く述べると，これらの利潤の計算は，すべて初期の仮定の下での，提示した価格とクーポン価値の組み合わせに基づいている．マーケティング会社の推定量をまじめに捉えるならば，彼らによって誤ってもたらされた利潤がどの程度「敏感」なのかを，これは示している．例えば，もしマーケティング会社がクーポンを所有する割合と，そのグループの弾力性の範囲を示すならば，パラメーターのとりうる帯域の間で比較的よい結果をもたらす提示価格とクーポン価値の組み合わせを求めることができる．

Microsoft Excel - PROBLEM 4.14.XLS

	A	B	C	D	E	F
1						
2		販売量	10,000	10,000	10,000	
3		需要の弾力性	-3	-3	-3	
4		現在の提示価格	$10.00	$10.00	$10.00	
5						
6		限界費用	$6.67	$6.67	$6.67	
7						
8		クーポンの保有割合	40%	20%	20%	
9		クーポン使用グループの平均弾力性	-5	-6	-5	
10						
11		クーポンを保有しないグループの弾力性	-1.667	-2.250	-2.500	
12						
13		新しく提示された価格	$11.25	$11.25	$11.25	
14		クーポン価値	$2.08	$2.08	$2.08	
15						
16		クーポンを保有しないグループへの販売量	4,750.00	5,750.00	5,500.00	
17		クーポンを保有するグループへの販売量	5,660.00	2,996.00	2,830.00	
18						
19		総販売量	10,410.00	8,746.00	8,330.00	
20						
21		利潤	$2,606.37	$520.82	-$1,040.57	
22		利潤率(%)	7.82%	1.56%	-3.12%	
23						

図 4.11　問題 4.14 のシート 3：感応分析

練習問題 4.15 の解答

販売量と価格の回帰分析を行い，回帰分析のパッケージプログラム（Excel）で，需要方程式 $D(p)=1{,}155-15.05p$ を得た．このときの修正 R^2 は 0.63 である．傾きの係数の 95%信頼区間は-19.3 から-10.7 である．問題としてはなかったが，例えば価格が$50 のときの，需要の価格弾力性も計算できる．その方法とは以下のとおりである．（1）その価格での需要の推定量を，$D_e(50)=1{,}155.4-15.05\times 50=402.9$ と求める．そして（2）需要と需要の傾きを弾力性の推定量の公式に代入する．

$$\nu_e(50) = \text{estimate of } D'(50)\times\frac{50}{D_e(50)} = -15.05\times\frac{50}{402.9} = -1.8677$$

傾きの係数と$D(50)$の推定量は相関し，比率をとるので，計算された弾力性の推定量はもしかしたらバイアスがあるかもしれないということに注意をしてもらいたい．弾力性の推定量の標準偏差や信頼区間を求めることは，簡単なことではない．読者の知っている統計学者であれば，これからこの数値を求めることができるだろう．

練習問題 4.16 の解答

警告を所与のものとして，微分に通じた読者のみこの問題に取り掛かっているものと想定し，この問題を微分を使って解こう．価格pの関数として総収入を$TR(p)$と記そう．もちろん，以下のようになる．

$$TR(p) = p\times D(p)$$

微分の積の公式を使うと，

$$\frac{\mathrm{d}TR(p)}{\mathrm{d}p} = D(p) + pD'(p) = D(p)\left(1+\frac{pD'(p)}{D(p)}\right) = D(p)(1+\nu(p))$$

これで十分である．

（幾人かの学生にとって）戸惑う点は，総収入は$\nu(p) < -1$のときには，つまり需要が弾力的のときには，減少関数となる点であろう．しかし，教科書では，これらの条件の下では，総収入は増加するのである．何故だろう？

読者が一生懸命にこの問題に取り組むならば，その理由は単純にわかるだろう．この公式では，総収入は需要が弾力的であるときには，*価格*の減少関数であるといっているのであるが，教科書では，総収入はこれらの条件の下では，*需要量*の増加関数となるのである．今述べたことは，需要曲線に沿ってすべて生じる．需要量が増えると，価格は下落する．したがって，2 つのことは全く同じことを述べているのである．