『〈サピエンティア〉経済数学』
練習問題解答（改訂）

入谷純・加茂知幸

2024 年 1 月 24 日

1　準備

問題 1.1　(1)　原点を通る傾きが 2 の直線の方程式は $y = 2x$ である。題意の直線は，これを x 軸方向へ 2，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものである。よって，その方程式は $y - 5 = 2(x - 2)$，すなわち $y = 2x + 1$ である。

(2)　与式を書き換えると $y = 2x^2 + 1$ を得る。すなわち，求める図形は，放物線 $y = 2x^2$ を y 軸方向に 1 だけ平行移動した曲線である。

問題 1.2　(1)　$S = Y - C$ だから，$Y = C + I = 50 + 0.5Y + 50 - r$ より

$$r = 100 - 0.5Y$$

である。

(2)　$L = M$，すなわち $Y - 2r = 100$ より

$$r = 0.5Y - 50$$

である。

(3)　$100 - 0.5Y = 0.5Y - 50$ より，$Y = 150, r = 25$ である。

問題 1.3　$(x_1, x_2) = (2, 1)$ のときの効用は $u = 2^2 \times 1 = 4$ である。$(2, 1)$ を通る無差別曲線は，方程式 ${x_1}^2 x_2 = 4$ の解の集合である（ただし，$x_1, x_2 \geqq 0$ とする）。$x_1 = 0$ は解ではないので，上式は $x_2 = \frac{4}{{x_1}^2}$ と書き換えることができる。すなわち，原点に対して凸の曲線である。

問題 1.4　求める等量曲線は方程式 $(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2})^2 = 8$ の解である（ただし，$z_1, z_2 \geqq 0$ とする）。$(z_1, z_2) = (0, 8), (2, 2), (8, 0)$ はこの方程式の解である。すなわち，求める曲線は 3 点 $(0, 8), (2, 2), (8, 0)$ を通る曲線である。

別解：方程式を次のように書き換える。

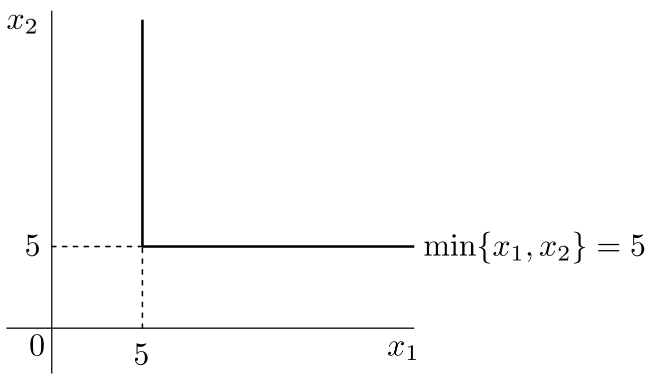
$$z_2 = z_1 - 4\sqrt{2z_1} + 8.$$

つまり方程式の解には上記の関数関係が成り立つ。この関数のグラフは原点に対して凸の曲線である。これが求める等量曲線である。

問題 1.5

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x^2 + 1$$

問題 1.6　ハンバーガーをちょうど 5 個だけ作るには，(i) バンズがちょうど 5 個でパテが 5 枚以上あるか，もしくは (ii) パテがちょうど 5 枚でバンズが 5 個以上あるか，のいずれかである。(i) のケーズは $x_1 = 5, x_2 \geqq 5$ であり，(ii) のケースは $x_1 \geqq 5, x_2 = 5$ である。これを図示すると下図のようになる。



問題 1.7

$$\begin{aligned} f(tx_1, tx_2) &= (\alpha(tx_1)^{-\rho} + \beta(tx_2)^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} \\ &= \{t^{-\rho}(\alpha x_1^{-\rho} + \beta x_2^{-\rho})\}^{-\frac{1}{\rho}} \\ &= t(\alpha x_1^{-\rho} + \beta x_2^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} = tf(x_1, x_2) \end{aligned}$$

問題 1.8　(1) 収穫一定　(2) 収穫逓減　(3) 収穫逓増　(4) いずれでもない　(5) 収穫逓減

問題 1.9

(1)　$\sqrt{(tK)(tL)} = \sqrt{t^2KL} = t\sqrt{KL}.$

(2)　$y = \dfrac{Y}{L} = \dfrac{1}{L}\sqrt{KL} = \sqrt{\dfrac{K}{L}\dfrac{L}{L}} = \sqrt{k}.$

2　微分法

問題 2.1

(1)　$\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$, $\left(e^{2x}\right)'' = 4e^{2x}$.

(2)　$\left(e^{\log x}\right)' = 1$, $\left(e^{\log x}\right)'' = 0$　($e^{\log x} = x$ に注意)。

(3)　$(x \log x)' = \log x + 1$, $(x \log x)'' = 1/x$.

(4)　次の関係 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ を用いるとよい。
$(\sin x \cos x - \sin 2x)' = -\cos 2x$, $(\sin x \cos x - \sin 2x)'' = 2 \sin 2x$.

(5)　$(1 - 1/\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-3/2}$, $(1 - 1/\sqrt{x})'' = -\dfrac{3}{4}x^{-5/2}$。

(6)　$(x - 1/x)' = 1 + x^{-2}$, $(x - 1/x)'' = -2x^{-3}$.

問題 2.2

(1)　$y - a^2 = (a + b)(x - a)$。

(2)　方程式 $x^2 = (a + b)(x - a) + k$ が重根を持つなら，$x = (a + b)/2$ においてである。
別解： 微分を利用すると $(a + b) = 2x$ が成り立つ。

(3)　一般の二次関数で成立する。

問題 2.3　加法定理によって，

$$\cos h = \cos(h/2 + h/2) = \cos^2 \frac{h}{2} - \sin^2 \frac{h}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}$$

である。よって，

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 h/2}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sin \frac{h}{2}\right)\left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right) = 0$$

となる。

別解： 次の関係に注目する。

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos(0+h) - \cos 0}{h}$$

したがって，$\cos' x = -\sin x$ であることから，

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\cos' 0 = \sin 0 = 0$$

が得られる。

問題 2.4　$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 10000$ が生産可能性曲線である。作図は略。

問題 2.5　$x = a, -a$ での微分可能性を調べるだけで十分である。まず，$x = a$ における f_a の微分を求める。$a > h > 0$ とする。$f_a(a+h) - f_a(a) = 0$ であるから，h を正値のまま 0 に近づければ，$(f_a(a+h) - f_a(a))/h \to 0$ である。また，

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2a}(a-h)\right) - \sin\frac{\pi}{2}}{-h} = \frac{\pi}{2a}\frac{1-\cos\frac{\pi}{2a}h}{\frac{\pi}{2a}h}$$

であるから，問題 2.3 の結果（あるいは，(2.18)）より，h を正値のままゼロに近づければ，上式の右辺は 0 に収束する。以上によって，$x = a$ において微分可能で $f'_a(a) = 0$ となる。

$x = -a$ における f_a の微分可能性も同様であるから，エッセンスだけを示しておく。$0 > h > -a$ ならば

$$\sin\left(\frac{\pi}{2a}(-a-h)\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2a}h + 1$$

である。したがって，(2.18) を用いれば，$f'_a(-a) = 0$ である。

$a \to 0$ の場合には $f_a(x)$ は $x \leqq 0$ で -1 に，$x \geqq 0$ で 1 に近づく。この関数の極限は不連続である。

問題 2.6　(1) $\phi(x) = f(\bar{z} - g^{-1}(x))$．(2) $\phi'(x) = -f'(\bar{z} - g^{-1}(x))/g'(g^{-1}(x))$.

3　１変数の最大化問題

問題 3.1　定理 3.5 より，$f(x)$ が凹関数であるための必要十分条件は $f''(x) = a < 0$ である。

問題 3.2

(1)　$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ より凹関数。

(2)　$f''(x) = e^x > 0$ より凸関数。

(3)　$f''(x) = 12x^2 \geqq 0$ より凸関数。

問題 3.3　$f''(x) = e^x > 0$ より，$f(x)$ は凸関数。1 階条件 $f'(x) = e^x - e = 0$ より $x = 1$ である。定理 3.6 より，最小値は $f(1) = 0$ である。

問題 3.4　生産者の利潤を $\pi(x)$ とすると

$$\pi(x) = p\log(x+1) - wx$$

である。$\pi''(x) = -\frac{p}{(x+1)^2} < 0$ より，$\pi(x)$ は凹関数である。1 階条件より，$\pi'(x) = \frac{p}{x+1} - w = 0$, すなわち $x = \frac{p-w}{w}$ である。定理 3.6 より，利潤を最大にする要素投入量は $x = \frac{p-w}{w}$ である。

問題 3.5

(1)　$f''(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}} < 0$ より凹関数。

(2)　$f'(x) = -3x^{\frac{1}{2}} + 15 = 0$ より $x = 25$ である。

4　積分法

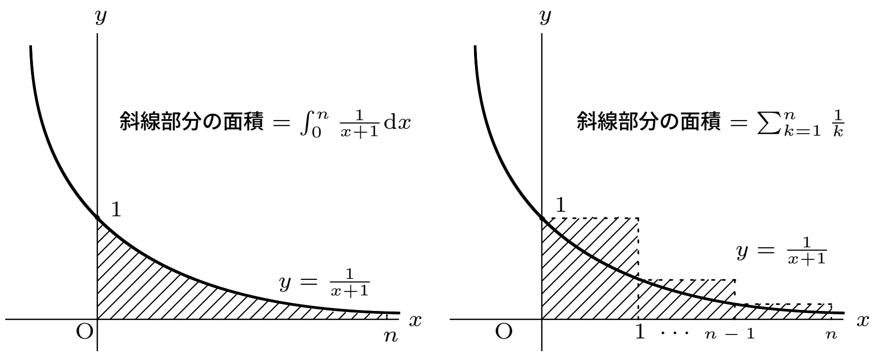
問題 4.1　(1)　$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$，$\log(x+1)$，$\dfrac{1}{2}e^{2x}$

(2)　$\displaystyle\int_0^\infty 1/(x+1)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^n 1/(x+1)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\log(n+1) = \infty.$

(3)　$y = 1/(x+1)$ のグラフを描くと，図（面積の比較１）より，

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geqq \int_0^n \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \log(n+1)$$

が判る。これより $n\to\infty$ を考えればよい。



面 積 の 比 較 1

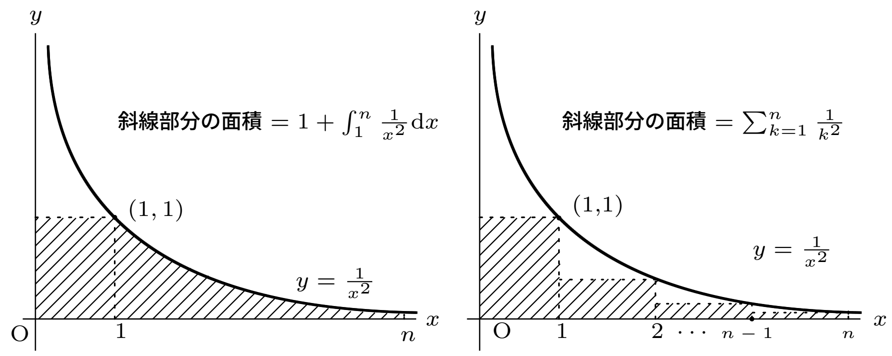
(4)　有限値である。グラフを描き，図（面積の比較２）より，

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

である。さらに，

$$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{x} + C\ ,\ \ \int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{n}$$

より明らかである。



面積の比較 2

(5)　上問 (3) より積分値は無限大に発散する。よって積分可能ではない。

問題 4.2

(1)　$y = 3x+1$ とすると，$x = y/3 - 1/3$ であるから，

$$x(3x+1)^6 = \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{3}\right)y^6, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{3}$$

である。

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{3}\right)y^6 \times \frac{1}{3}\mathrm{d}y &= \frac{1}{9}\int (y^7 - y^6)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{y^8}{8} - \frac{y^7}{7}\right) + C\end{aligned}$$

となる。したがって，置換積分を利用して，

$$\int x(3x+1)^6\mathrm{d}x = \frac{1}{9}(3x+1)^7\left(\frac{3x}{8} - \frac{1}{56}\right) + C$$

に至る。

(2)　$y = 3x+1$ とする。$x = y/3 - 1/3$ であるから，

$$\frac{x}{(3x+1)^2} = \frac{\frac{y}{3} - \frac{1}{3}}{y^2} = \frac{1}{3y} - \frac{1}{3y^2}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{3}$$

である。

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{3y} - \frac{1}{3y^2}\right) \times \frac{1}{3}\mathrm{d}y &= \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{9}\left(\log|y| + \frac{1}{y}\right) + C\end{aligned}$$

したがって，置換積分を利用して，

$$\int \frac{x}{(3x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left(\log|3x+1| + \frac{1}{3x+1}\right) + C$$

を得る。

問題 4.3

(1) $x\sin x + \cos x + C$

$(x\sin x)' = \sin x + x\cos x$ したがって，

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,\mathrm{d}x &= x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x + C\\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

(2) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$

直前の小問 (1) と同様にして，$(x\cos x)' = \cos x - x\sin x$ だから，

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x - x\cos x + C = \sin x - x\cos x + C$$

である。また，$(x^2\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x$ であるから，

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x &= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,\mathrm{d}x + C\\ &= x^2\sin x - 2(\sin x - x\cos x) + C\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\end{aligned}$$

である。

(3) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

$(x^2\cos x)' = 2x\cos x - x^2\sin x$ だから，問題 4.3 (1) を用いて，

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x &= \int 2x\cos x\,\mathrm{d}x - x^2\cos x + C\\ &= 2(x\sin x + \cos x) - x^2\cos x + C\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

である。

問題 4.4　$-1 \leqq x \leqq 0$ について $f(x)=1$，$0<x \leqq 1$ について $f(x)=-1$ と定義される関数は 0 において不連続だが，区間 $[-1,1]$ で積分可能である。

問題 4.5

(1) $p=c'(q)$.

(2) p が与えられた時, 利潤を最大化する生産量 q^* は未知数を q とする方程式 $p=c'(q)$ の解である。この作業を繰り返せば，価格 p が与えられた時に，販売計画量（供給）が得られることになる。これが供給関数になる。

(3) 縦軸に関数 c' の値（限界費用），横軸に q をとり，$c'(q)$ のグラフを描く。c' の逆関数 c'^{-1} が供給関数となり，グラフは $c'(q)$ のグラフと一致する。

(4) 供給関数を $x(p)$ とする。(3) より，$c'(q)=x^{-1}(q)$ である。生産者余剰 $= px(p) - \int_0^{x(p)} x^{-1}(q)\mathrm{d}q = px(p) - \int_0^{x(p)} c'(q)\mathrm{d}q = px(p) - c(x(p)) + c(0) =$ 利潤$+$固定費用

5　線形代数

問題 5.1

(1) $(\hat{x}_1-\hat{y}_1, \hat{x}_2-\hat{y}_2)$ または $(\hat{y}_1-\hat{x}_1, \hat{y}_2-\hat{x}_2)$

(2) 第 1 節で学んだ直線のベクトル方程式を利用すると，$x=t(\hat{x}_1-\hat{y}_1, \hat{x}_2-\hat{y}_2)+(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ であるから，$x=t\hat{x}+(1-t)\hat{y}$ である。$x=t\hat{y}+(1-t)\hat{x}$ でもよい。

(3) $x=t(\hat{x}-\hat{y})$

問題 5.2

(1) 左辺を第一行で余因子展開をすれば，結果が得られる。

(2) 第 2 行から第 1 行を引くと第 2 行は $(3,3,3)$ となり，第 3 行から第 1 行を引くと第 3 行は $(6,6,6)$ となるので, 行列式は 0 である。

(3) （ヴァンデルモンド行列式）

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a)\end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & 0 & (c-a)(c-b)\end{pmatrix}$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

(4) （巡回行列式）

$$\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{pmatrix}$$
$$= (a+b+c)\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= (a+b+c)\det\begin{pmatrix}0 & b-a & c-a\\ 0 & a-c & b-c\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$= (a+b+c)(a^2+c^2+b^2-ab-bc-ca)$$
$$= a^3+b^3+c^3-3abc$$

(1), (2), (3), (4) は，行列式の定義に従って単純に計算しても得られる。

問題 5.3　ヒント：次の関係,

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

に着目せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

問題 5.4 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(2-1) $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & -w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz-yw & -xw-yz \\ yz+xw & xz-yw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -w \\ w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

(2-2), (2-3), (2-4) は計算すればよいので省略する。

(2-5) x, y, x', y' を実数とする。(2-2) と (2-3) は複素数の演算

$$i \times i = -1,\ (x+yi)(x'+y'i) = xx' - yy' + (xy' + x'y)i$$

に対応している。ただし，$i = \sqrt{-1}$ である。

複素数 α の共役複素数を $\bar{\alpha}$ を書けば，(2-4) は転置によって共役複素数が表現できることを示している。

この小問で考察している行列の集合を $\mathbb{C}$ とすれば，$\mathbb{C}$ は 4 つの数値で表現される空間の部分集合である。しかも複素数の集合と一対一に対応し，演算も両者に対応したものがあることを示している。

問題 5.5

(1) $F(x) = \det A$ の第 1 行に着目して余因子展開をすれば，$F(x) = f(x)\Delta_{11} + g(x)\Delta_{12} + h(x)\Delta_{13}$ である。ここで, Δ_{ij} は (i, j) 余因子である。$\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$ には変数 x が入らないことに注意をすれば, $F'(x) = f'(x)\Delta_{11} + g'(x)\Delta_{12} + h'(x)\Delta_{13}$ となる。この右辺は，行列 A の第 1 行に $(f'(x), g'(x), h'(x))$ が入った行列の行列式を第 1 行で余因子展開したものである。したがって，(1) の結果が得られる。

(2) $F(a)$ が第 1 行と第 2 行が同一，$F(b)$ は第 1 行と第 3 行が同一の行列式になって

いる。したがって，行列式は 0 である。

問題 5.6

(1) ベクトル a^1 と b が（あるいは，ベクトル a^2 と b が）一次独立であればよい。$\det A = 0$ であるから，二つのベクトル a^1, a^2 は一次従属となる（定理 5.5 (ii))。ある実数 k_1, k_2 があって，$k_1 a^1 + k_2 a^2 = (0,0)^{\mathrm{T}}$ である。k_1, k_2 のどちらかはゼロでない，したがって，どちらもゼロでない。よって，$a^2 = k a^1$ を成立させる k が存在する。$x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ を未知数とする方程式 $Ax = b$ は $(x_1 + k x_2) a^1 = b$ となる。したがって，ベクトル a^1 と b が一次独立なら，解は存在しない。逆に， a^1 と b が一次従属と仮定する。このとき，$y_1 a^1 + y_2 b = (0,0)^{\mathrm{T}}$ で y_1, y_2 のどちらかは 0 でない。a^1 も b も 0 ベクトルでないので，$y_1 \neq 0$ かつ $y_2 \neq 0$ である。したがって，$y a^1 = b, y \neq 0$ となる y が存在する。いま，$x_1 = 0, x_2 = y/k$ とすれば，$x_1 a^1 + x_2 a^2 = x_2 k a^1 = y a^1 = b$ である。よって，$x_1 = 0, x_2 = y/k$ という解が存在する。以上の対偶をとると「解が存在しなければ，a^1 と b は一次独立である」が成立する。

(2) $Ax = b$ を満たすひとつの解を $\hat{x}$，$Ax = 0$ を満たす解の集合を S_0 とすれば，$S_0 + \{\hat{x}\} = \{x + \hat{x} \,|\, x \in S_0\}$ が解の集合である。$Ax = b$ を満たすひとつの解を $\hat{x}$ とする。$\hat{x}$ の存在は，次のように示すことができる。(1) より，解が存在する必要十分条件は a^1 と b が一次従属になることである。(1) の後半より，$\hat{x} = (0, y/k)^{\mathrm{T}}$ はひとつの解である。さらに，方程式 $Ax = 0$ の解の集合は，$S_0 = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \,|\, x_1 a^1 + x_2 a^2 = (0,0)^{\mathrm{T}}\}$ であり，原点を通る直線となる。いま，$S = S_0 + \{\hat{x}\}$ と定義すれば，S は方程式 $Ax = b$ の解の集合である。逆に，方程式 $Ax = b$ の任意の解は S の要素であることを示すことは易しい。

(3) 余因子展開より，$(\mathrm{adj}\, A) a^1 = (0,0)^{\mathrm{T}}$ である。よって，$\mathrm{adj}\, A$ の 2 つの列は一次従属である。定理 5.5 (ii) より，$\det(\mathrm{adj} A) = 0$ である。

6　確率論

問題 6.1　選ばれた生徒が女子である事象を A，2 組である事象を B とすると，求める確率は条件付き確率の定義より，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{21}{57}}{\frac{30}{57}} = \frac{21}{30}$$

である。

　または次のように直接確かめることもできる。2 組の人数は $9 + 21 = 30$ 人，そのうち女子は 21 人であるから，求める確率は $\dfrac{21}{30}$ である。

問題 6.2

(1)　$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ である。$X_1 X_2$ が奇数となるのは X_1, X_2 のいずれもが奇数となるときであるから，$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。$X_1 - X_2 \geqq 2$ となるのは

$$(X_1, X_2) = (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (4,2), (5,2), (6,2), (5,3), (6,3), (6,4)$$

の 10 通りある。よって，$P(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ である。

(2)　$X_1 \leqq 4$ かつ $X_1 X_2$ が奇数となるのは，$X_1 = 1$ または 3 で X_2 が奇数の場合，すなわち

$$(X_1, X_2) = (1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5)$$

の 6 通りである。したがって

$$P(A \cup B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P(A)P(B)$$

が成り立つ。つまり A と B は独立である。

(3)　$X_1 \leqq 4$ かつ $X_1 - X_2 \geqq 2$ となるのは

$$(X_1, X_2) = (3,1), (4,1), (4,2)$$

の 3 通りである。したがって

$$P(A \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{13} \neq \frac{5}{27} = P(A)P(C)$$

が成り立つ。つまり A と C は独立ではない。

問題 6.3

(1) $E[X] = \frac{1}{2} \times 14400 + \frac{1}{4} \times 10000 + \frac{1}{4} \times 3600 = 10600.$

(2) 投資するときの期待効用は

$$E[u(X)] = \frac{1}{2} \times \sqrt{14400} + \frac{1}{4} \times \sqrt{10000} + \frac{1}{4} \times \sqrt{3600} = 100.$$

投資しないときの効用は $\sqrt{10000} = 100$ であるから，投資することと投資しないこととは無差別である。

(3) $E[X] = \frac{2}{3} \times 14400 + \frac{1}{6} \times 10000 + \frac{1}{6} \times 3600 = \frac{35600}{3}.$

(4) 投資するときの期待効用は

$$E[u(X)] = \frac{2}{3} \times \sqrt{14400} + \frac{1}{6} \times \sqrt{10000} + \frac{1}{6} \times \sqrt{3600} = \frac{320}{3}.$$

これは投資しないときの効用 100 を上回るので投資する。

問題 6.4　(1) 誤　(2) 誤　(3) 正　(4) 正

7　固有値・二次形式

問題 7.1

(1) 固有方程式は $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = (\alpha - 2)(\alpha - 3) = 0$ であるから，特性根は $\alpha = 2, 3$ である。よって固有値は 2 と 3 である。

(2) 固有方程式は $\alpha^2 - 8\alpha + 15 = (\alpha - 3)(\alpha - 5) = 0$ であるから，特性根は $\alpha = 3, 5$ である。よって固有値は 3 と 5 である。

問題 7.2　固有方程式は $\alpha^2 - (a + c)\alpha + ac = (\alpha - a)(\alpha - c) = 0$ であるから，特性根は $\alpha = a, c$ である。よって固有値は a と c である。

問題 7.3

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) &= a\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\\ &= a(\alpha\boldsymbol{x})+b(\alpha\boldsymbol{y})\\ &= \alpha(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

問題 7.4

(1) ${x_1}^2, {x_2}^2 \geqq 0$ であり，$2{x_1}^2+3{x_2}^2=0$ となるのは $x_1=x_2=0$ のときのみである。よって，正値定符号である。

(2) $(x_1,x_2)=(1,0)$ のときの値は 1, $(x_1,x_2)=(0,1)$ のときの値は -1 であるから不定である。

(3) ${x_1}^2+4x_1x_2+4{x_2}^2=(x_1+2x_2)^2 \geqq 0$ であり，$x_1=-2x_2$ とき，その値は 0 となる。よって半正値定符号である。

(4) $(x_1-x_2)^2 \geqq 0$ であり，$x_1=x_2$ とき，その値は 0 となる。よって半正値定符号である。

別解： 定理 7.4 を用いる。

(1) $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&3\end{smallmatrix}\right)$ において，$2>0$, $\det\boldsymbol{A}=6>0$ であるから，正値定符号である。

(2) $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ において，$1>0$, $\det\boldsymbol{A}=-1<0$ であるから，不定である。

(3) $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&4\end{smallmatrix}\right)$ において，$1>0$, $4>0$, $\det\boldsymbol{A}=0$ であるから，半正値定符号である。

(4) $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ において，$1>0$, $1>0$, $\det\boldsymbol{A}=0$ であるから，半正値定符号である。

問題 7.5

(1) 固有方程式は $\alpha^2-4\alpha+3=(\alpha-1)(\alpha-3)=0$ であるから特性根は $\alpha=1,3$ である。よって固有値は 1 と 3 である。

(2) $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&3\end{smallmatrix}\right)$.

(3) $\boldsymbol{A}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ ともに正値定符号である。

問題 7.6

(1) $y^* = -\dfrac{1}{3}y^* + 4$ より，$y^* = 3$。

(2) 定理 7.6 より，$y_t = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^t (y_0 - 3) + 3$。

(3) $t \to \infty$ のとき，$\left(-\frac{1}{3}\right)^t$ は 0 に収束するから，(2) より y_t は定常点 3 に収束する。

問題 7.7

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} \frac{5}{4}y^* - \frac{3}{4}z^* = y^* \\ -\frac{3}{4}y^* + \frac{5}{4}z^* = z^* \end{cases}$$

を解いて，$y^* = z^* = 0$ である。

(2) 行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

の特性方程式は

$$2\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$$

であるから，特性根は

$$\alpha = \frac{1}{2}\ ,\ 2$$

である。これが $\boldsymbol{A}$ の固有値である。

(3) $y_0 = z_0 = a$ とおくと

$$y_1 = \frac{5}{4}y_0 - \frac{3}{4}z_0 = \frac{1}{2}a$$
$$z_1 = -\frac{3}{4}y_0 + \frac{5}{4}z_0 = \frac{1}{2}a$$

である。逐次代入を繰り返すことにより

$$y_t = z_t = \frac{a}{2^t}$$

を得る。これより

$$\lim_{t\to\infty} y_t = \lim_{t\to\infty} z_t = 0$$

であることがわかる。

問題 7.8

(1) $y^* = \dfrac{5}{6}y^* - \dfrac{1}{6}y^* + 1$ より，$y^* = 3$。

(2) 行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の特性方程式は

$$\alpha^2 - \frac{5}{6}\alpha + \frac{1}{6} = 0$$

であるから，特性根は

$$\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

である。これが $\boldsymbol{A}$ の固有値である。

(3) まず

$$\boldsymbol{y_t} = \begin{pmatrix} y_{t+1} \\ y_t \end{pmatrix}$$

とおいて，次の連立同次差分方程式を考える

$$\boldsymbol{y_{t+1}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y_t}$$

定理 7.8 より，解の一般項は

$$\boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{A^t}\boldsymbol{y_0}$$

と表される。ただし

$$\boldsymbol{y_0} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

である。$(1,2)^{\mathrm{T}}$，$(1,3)^{\mathrm{T}}$ は，それぞれ固有値 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ に対する固有ベクトルであるから，

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^t &= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \frac{1}{2^t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^t} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2^t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2^t} - \frac{2}{3^t} & -\frac{1}{2^t} + \frac{1}{3^t} \\ \frac{6}{2^t} - \frac{6}{3^t} & -\frac{2}{2^t} + \frac{3}{3^t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。すなわち

$$
\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2^t} - \frac{2}{3^t} & -\frac{1}{2^t} + \frac{1}{3^t} \\ \frac{6}{2^t} - \frac{6}{3^t} & -\frac{2}{2^t} + \frac{3}{3^t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}.
$$

これより

$$
y_t = -(y_0 - 3y_1)\frac{1}{2^{t-1}} + (y_0 - 2y_1)\frac{1}{3^{t-1}}
$$

である。よって，求める解の一般項は

$$
y_t = -(y_0 - 3y_1)\frac{1}{2^{t-1}} + (y_0 - 2y_1)\frac{1}{3^{t-1}} + 3.
$$

8　解析学（1）

問題 8.1　2 つの数列は

$$
a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots a_n \leqq \cdots \leqq b_n \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1
$$

となるように作られている。これより (1), (2) は自明である。

(3) 次の等式から確かめることができる。

$$
b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}
$$

(4) (i) $(a_n)^2 \leqq 2 \leqq (b_n)^2$ であり，(ii) 数列 $a_n, n = 1, 2, \ldots$ は上に有界な単調列であり，(iii) 数列 $b_n - a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ はゼロに近づく。したがって，$a_n, n = 1, 2, \ldots$ は $\sqrt{2}$ に近づく。

問題 8.2　(1) 条件 (i), (ii) より，C' は連続かつ単調増加的で，C' の取りうる値は $]0,\infty[$ である。したがって，$p>0$ であるので，$p=C'(q)$ を満たす q は存在する。

(2) 略

問題 8.3　注意：K と L についている係数 $\alpha, 1-\alpha$ は和が 1 となるようにされている。この設定は $\rho\to\infty$ を考察する場合に必要な条件である。

まず，CES 関数を次のように書く。

$$F(K,L,\rho)=\Big(\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}\Big)^{-1/\rho}$$

対数を取ることによって，

$$\log F(K,L,\rho)=-\frac{\log\left(\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}\right)}{\rho}$$

を得る。以下，(K,L) は正値に固定されていると考える。

最初に，$\rho\to 0$ の場合を考察する。このとき，分母はゼロに，分子もゼロに収束する。ロピタルの定理によって，

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\log F(K,L,\rho)&=-\lim_{\rho\to 0}\frac{-\alpha(\log K)K^{-\rho}-(1-\alpha)(\log L)L^{-\rho}}{\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}}\\&=\alpha\log K+(1-\alpha)\log L=\log K^{\alpha}L^{1-\alpha}\end{aligned}$$

となる。対数関数は連続であるから，$\lim_{\rho\to 0}F(K,L,\rho)=K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ である。

次に，$\rho\to\infty$ の場合を考察する。最初に，$K\geqq L$ となる場合から始める。

$$\log F(K,L,\rho)=\log L-\frac{\log\Big(\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho}+(1-\alpha)\Big)}{\rho}$$

と変形できる。上式右辺第二項の分子に着目する。$K>L$ であるから，$\rho\to\infty$ ならば，$(K/L)^{-\rho}\to 0$ である。さらに，$K=L$ の場合には，第二項の分子は $\log(\alpha+1-\alpha)=0$ となる。したがって，$\rho\to\infty$ とすれば，第二項は 0 に収束する。つまり，

$$\lim_{\rho\to\infty}\log F(K,L,\rho)=\log L$$

となる。同様にして，$L > K$ のケースには,

$$\lim_{\rho\to\infty} \log F(K, L, \rho) = \log K$$

が得られる。対数関数の連続性から,

$$\lim_{\rho\to\infty} F(K, L, \rho) = \min(K, L)$$

が得られる。

別解　$\rho \to \infty$ のケースについて，別解を与えておこう。ρ は大きな正値であると考えておいて良い。K, L が正値で与えられているとする。$K \geqq L$ のケースを想定する。すると，$L^{-\rho} \geqq K^{-\rho}$ である。よって，次の一連の変形ができる。つまり,

$$\begin{aligned} &L^{-\rho} \geqq \alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho} \geqq (1-\alpha)L^{-\rho} \\ &L \leqq \left(\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right)^{-1/\rho} = F(K, L, \rho) \leqq (1-\alpha)^{-1/\rho} L \end{aligned}$$

である。ここで，ρ を無限に発散させると，$(1-\alpha)^{-1/\rho}$ は 1 に収束するので,

$$\lim_{\rho\to\infty} F(K, L, \rho) = L$$

となる。$L \geqq K$ の場合も同様の議論をすることができるので,

$$\lim_{\rho\to\infty} F(K, L, \rho) = \min(K, L)$$

であることが判る。

問題 8.4

(1)　$x_2 = \dfrac{c^{1/\beta}}{{x_1}^{\alpha/\beta}}$

(2)　限界代替率は

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

である。 一方，(1) を利用して,

$$-\left(\frac{c^{1/\beta}}{{x_1}^{\alpha/\beta}}\right)' = -\left(c^{1/\beta}{x_1}^{-\alpha/\beta}\right)' = c^{1/\beta}\frac{\alpha}{\beta}{x_1}^{-\alpha/\beta-1} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{c^{1/\beta}}{x_1^{\alpha/\beta}}\frac{1}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

となる。

問題 8.5　元金を A とすれば，$A(1+r)^n = 2A$ である。よって，$n\log(1+r) = \log 2$ となる。従って，

$$rn = \frac{r}{\log(1+r)}\log 2$$

である。ロピタルの定理により，

$$\lim_{r\to 0}\frac{r}{\log(1+r)} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{1/(1+r)} = 1$$

であるから，r が充分に小さいと，$\log 2 = 0.69$ とすれば，

$$rn \fallingdotseq \log 2 \fallingdotseq 0.70$$

となる。

直感的な解説　$f(r) = \log(1+r)$ とすれば，対数の微分によって，

$$f(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f(r)\Big|_{r=0} = 1$$

であるから，$f(r)$ は $r = 0$ の近傍では原点を通る傾き 1 の直線で近似される。したがって，r が十分小さい時には，$r/\log(1+r) \fallingdotseq 1$ であり，

$$rn = \frac{r}{\log(1+r)}\log 2 \quad \text{は} \quad rn = \log 2 \quad \text{で近似される。}$$

問題 8.6

(1)　ロピタルの定理を用いればよい。つまり，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{a}\frac{1}{e^{ax}} = 0$$

(2)　ロピタルの定理と数学的帰納法を用いればよい。前問より，$n = 1$ の場合には成立する。$n = k$ の時成立すると仮定すれば，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k+1}}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(k+1)x^k}{ae^{ax}} = \lim_{x\to\infty}\frac{k+1}{a}\frac{x^k}{e^{ax}} = 0$$

となる。よって，$n = k + 1$ の場合にも成立する。

9　解析学（2）

問題 9.1

(1)　$2x_1+3x_2=5,\ x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$ を満たす (x_1,x_2) の中で，${x_1}^2{x_2}^3$ を最大にするものは，$(x_1,x_2)=(0,5/2)$ でもないし，$(x_1,x_2)=(5/3,0)$ でもない（これらの時は ${x_1}^2{x_2}^3=0$ である）。したがって，最大化を達成する (x_1^*,x_2^*) は共に正値である。h_1,h_2 を充分ゼロに近い任意の数とする（正負は問わない）。微分可能性より，

$$u(x_1^*+h_1,x_2^*+h_2)=u(x_1^*,x_2^*)+h_1\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)+h_2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)+o(h_1,h_2)$$

とできる。ただし，$\|(h_1,h_2)\|$ がゼロに近づく時，$o(h_1,h_2)/\|(h_1,h_2\|$ もゼロに近づく。いま，h_1,h_2 の選択は任意であるから，$2h_1+3h_2=0$ としてもよい。この時，$2(x_1^*+h_1)+3(x_2^*+h_2)=5, x_1^*+h_1>0, x_2^*+h_2>0$ を満たすようにできる。また，$u(x_1^*+h_1,x_2^*+h_2)\leqq u(x_1^*,x_2^*)$ は明らかだから，

$$h_1\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)+h_2\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)+o(h_1,h_2)\leqq 0,\ 2h_1+3h_2=0$$

が得られる。h_1,h_2 のどちらかを正値と考えて良い。いま $h_1>0$ とする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)+\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)+\frac{o(h_1,h_2)}{h_1}&\leqq 0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)+\frac{1}{2}\frac{o(h_1,h_2)}{h_1}&\leqq 0,\end{aligned}$$

となる。ここで，h_1 を正値のままゼロに近づけると

$$\frac{o(h_1,h_2)}{h_1}=\frac{o(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}\frac{\|(h_1,h_2)\|}{h_1}=\frac{o(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}\frac{\sqrt{13}}{3}\to 0$$

となる。$\|(h_1,h_2)\|=\sqrt{13}h_1/3$ であることに注意せよ。従って，

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)\leqq 0$$

を得る。一方，$h_1 < 0$ として負値のままゼロに近づけると，逆向きの不等号を持つ式が得られるので，

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)$$

となる。

(2) 第 5 章第 1 節「一次関数と法線」を参照せよ。

(3) (1) の結果より，解 (x_1^*, x_2^*) は

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

を満たすので，この値を λ とすれば，

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2\lambda$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3\lambda$$

を満たす。$2x_1 + 3x_2 = 5$ は当然成立する。

(4) $x_1 = x_2 = 1.$

問題 9.2

(1) $g(x) = x^2 - 2$ とする。一回目の近似を x_1 とすれば，$x_1 = 1 - g(1)/g'(1) = 1 + 1/2 = 1.5$ である。二回目の近似を x_2 とすれば，$x_2 = x_1 - g(x_1)/g'(x_1) = 1.5 - 0.25/3 = 1.4166$ となる。

(2) $\hat{x}$ は正値ならどのような値でもよい。出発点を $\hat{x} > 0$，n 回目の近似を x_n とすれば，

$$x_n = x_{n-1} - \frac{{x_{n-1}}^2 - 2}{2x_{n-1}},\ x_0 = \hat{x},\quad n = 1, 2, \cdots$$

である。さらに，$x_0 > 0$ であるから，

$$x_n = \frac{{x_{n-1}}^2 + 2}{2x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{2}{2x_{n-1}} > 0, n = 1, 2, \ldots$$

となる。そこで「相加平均 $\geqq$ 相乗平均」（数学 II の内容）の関係から，

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{2}{2x_{n-1}} \geqq 2\sqrt{\frac{x_{n-1}}{2}\frac{2}{2x_{n-1}}} = \sqrt{2}$$

を得る。つまり，出発点 x_0 を除いて，$x_n \geqq \sqrt{2}, n = 1, 2, \ldots$ となる。さらに，$n \geqq 2$ について

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2 - {x_{n-1}}^2}{2x_{n-1}} < 0$$

である。したがって，数列 $x_1, x_2, \ldots$ は単調減少な数列となる。$x_n \geqq 0$ は明らかであるから，この列は収束する（第 8 章 1 節参照）。収束先を x とすれば，$(2 - x^2)/2x = 0$ を満たす。したがって，$x = \sqrt{2}$ である。以上の推論から，出発点 $\hat{x}$ が正値なら任意でよいことになる。

問題 9.3

(1) 効用関数を $u(x_1, x_2)$ とする。ただし, x_1, x_2 はそれぞれ財 1 と財 2 の数量を表す変数である。$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を与えられた財の量の組とする。効用関数 u は $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ において微分可能であるとする。そこで, 未知数を x_2 とする方程式 $u(x_1, x_2) = u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を想定する。ただし，x_1 は $\bar{x}_1$ の十分近くにあるとする。このとき，陰関数定理は，(i) 解が $x_2 = \phi(x_1)$ と関数の形で得られ，(ii) $\phi(x_1)$ が微分可能であることを示している。いま少し丁寧に陰関数定理の使われ方を解説する。$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = c$ とする。未知数を x_2 とする方程式,

$$u(\bar{x}_1, x_2) = c$$

を考える。この方程式の解は $x_2 = \bar{x}_2$ である。ここで,

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$$

であれば，陰関数定理によって，$\bar{x}_1$ を含む区間 S で微分可能な関数 $\phi(x_1)$ が存在して,

$$\text{任意の } x_1 \in S \text{ について } \quad u(x_1, \phi(x_1)) = c \text{ かつ } \phi(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$$

が成立する。最初の等式は x_1 の恒等式であるので，合成関数の微分を用いて，

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \phi(x_1)) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \phi(x_1))\phi'(x_1) = 0$$

を得る。これによって，

$$-\phi'(x_1) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \phi(x_1))}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \phi(x_1))}$$

となる。$-\phi'(x_1)$ が限界代替率である。

(2)　(1) と全く同じ作業である。

問題 9.4

(1)　$x = y = z = a$ が解であることは明らかである。

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, a) = 2y - x$$

であるから，$\partial f / \partial y(a, a, a) = a \neq 0$ も得られる。

(2)　答：$\dfrac{\partial y}{\partial x}(a, a) = 2, \quad \dfrac{\partial y}{\partial z}(a, a) = -1$

解法：上問 (1) により，陰関数定理を適用できる。そして，$y(x, z)$ は $(x, z) = (a, a)$ の近傍で微分可能であり，かつ，方程式 $f(x, y, z) = 0$ の解である。よって，

$$y^2(x, z) - x^2 - x(y(x, z) - z) = 0$$

は $x = a$ の近傍で恒等式である。したがって，微分作業をすると，

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} - 2x - (y - z) - x\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

となる。$y(a, a) = a$ であるから，よって，$\frac{\partial y}{\partial x}(a, a) = 2$ である。$\frac{\partial y}{\partial z}(a, a)$ についても同様にして計算できる。

(3)　$x = y = 0$ は $f(x, y, z) = 0$ の解であるが，$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, z) = 0$ であるので，陰関数定理を適用できない。したがって，(2) に対応する結果を出すことはできない。

問題 9.5

(1) 答：$y = (y(0) + 1/\alpha^2)e^{\alpha t} - t/\alpha - 1/\alpha^2$

解法：$y = z + k_1 t + k_2$ とする。$\dot{y} = \alpha y + t$ は $\dot{z} + k_1 = \alpha z + (\alpha k_1 + 1)t + \alpha k_2$ になる。ここで，$\alpha k_1 + 1 = 0, k_1 = \alpha k_2$ となるように k_1 と k_2 を定める。$k_1 = -1/\alpha, k_2 = -1/\alpha^2$ である。このとき，$\dot{z} = \alpha z$ となる。よって，$z = z(0)e^{\alpha t}$ となる。ここで，$z(0) = y(0) - k_2$ である。このようにして，$y = z(0)e^{\alpha t} + k_1 t + k_2$ が得られる。

(2) 答：$y = y(0)e^{t^2/2}$

解法：$y(t) = 0$ がある $t = \bar{t}$ で成立すれば，$y(t) = 0, t \geqq \bar{t}$ が解である。$y(t) \neq 0$ ならば，微分方程式は，$\dot{y}/y = t$ である。ヒントにより，$(\log y)' = t$ である。

$$\log y = \int \frac{\dot{y}}{y}\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + C$$

となるから，$y = e^C e^{t^2/2}$ である。ここで，$e^C = y(0)$ であるから，$y = y(0)e^{t^2/2}$ が得られる。

注意１：$\dot{y} = ty + \alpha$, $\alpha \neq 0$ のような形の微分方程式の解は，通常の初等関数では表現できず，$y = \int \alpha e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \times e^{t^2/2}$ の形となる。

注意２：分数関数，代数関数，三角関数，三角関数の逆関数，指数関数，対数関数およびそれらを有限回用いて作られる合成関数を**初等関数** (elementary function) と呼ぶ。代数関数とは，$f(x)^2 - x = 0$ のように，多項式方程式の根として表される関数である。

(3) 答：$y = t^\alpha e^C$, C は初期値 $y(0)$ によって決まる。

解法：$t > 0$ とする。ヒントにより，与えられた微分方程式は，

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\alpha}{t}$$

である。よって，$\log y = \alpha \log t + C = \log\left(t^\alpha e^C\right)$（ここで，$C = \log e^C$ に注意）。これは，$y = t^\alpha e^C$ を意味する。初期値 $y(0)$ が与えられると，$y = y(0)t^\alpha$ となるように定数 C が決まる。

(4) 答：$y = (y(0) + \beta/\alpha)c^{\alpha t} - \beta/\alpha$

解法：ヒントにより，$y = z + k$ とする。微分方程式 $t\dot{y} = \alpha y + \beta$ は

$$t\dot{z} = \alpha z + \alpha k + \beta$$

となる。そこで，$\alpha k + \beta = 0$ となるように $k = -\beta/\alpha$ と定める。すると，微分方程式は $t\dot{z} = \alpha z$ となる。前問 (3) によって，$z = z(0)c^{\alpha t}$ と解ける。よって，$y = z(0)c^{\alpha t} + k_1$ となる。

(5) 解は

$$y = 2re^{\frac{1}{2}} \cos\left(\theta + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。r と θ は，$y(0) = \dot{y}(0) = 1$ によって決まる。

解法：特性方程式 $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ の解は $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ と $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ である。したがって，(9.23) により，

$$y = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

と解ける。$e^{\lambda_1 t} = e^{\frac{1}{2}t}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}ti}$ となる。オイラーの公式 (8.13) を利用すると，

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\frac{1}{2}}\left(\cos t\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sin t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる。同様にして，

$$e^{\lambda_2 t} = e^{\frac{1}{2}}\left(\cos t\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\sin t\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。ここで，θ_a, θ_b を実数，r_a, r_b, を正の数として，

$$A = r_a(\cos\theta_a + i\sin\theta_a),\ B = r_b(\cos\theta_b + i\sin\theta_b)$$

としてみる。$0 < \theta_a, \theta_b < 2\pi$ としてよい。すると，

$$
\begin{aligned}
y =& r_a(\cos\theta_a + i\sin\theta_a)e^{\frac{1}{2}}\left(\cos t\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sin t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&+ r_b(\cos\theta_b + i\sin\theta_b)e^{\frac{1}{2}}\left(\cos t\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\sin t\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \\
=& r_a e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sin\left(\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
&+ r_b e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\theta_b + t\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + i\sin\left(\theta_b + t\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
=& r_a e^{\frac{1}{2}}\cos\left(\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + r_b e^{\frac{1}{2}}\cos\left(\theta_b + t\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \\
&+ ie^{\frac{1}{2}}\left\{r_a\sin\left(\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + r_b\sin\left(\theta_b + t\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

となる。$y(0) = \dot{y}(0) = 1$ であるから，動学経路はすべて実数値を取る。したがって，虚数部分はゼロである。すなわち，任意の $t > 0$ に対して，

$$
r_a\sin\left(\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + r_b\sin\left(\theta_b + t\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 0
$$

である。そこで，$\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/2$ となるように t を定めると，$r_a \leqq r_b$ である。逆に $\theta_b + t\frac{-\sqrt{3}}{2} = \pi/2$ とすれば，$r_a \geqq r_b$ である。したがって，$r_a = r_b$ である。さらに，

$$
\sin\left(\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin\left(\theta_b + t\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 0
$$

が任意の t について成立しなければならない。よって，$\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2} = -(\theta_b + t\frac{-\sqrt{3}}{2})$ であるので，$\theta_a + \theta_b = 0$ となる。その結果，

$$
\begin{aligned}
y &= r_a e^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\left(-\theta_a - t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= 2r_a e^{\frac{1}{2}}\cos\left(\theta_a + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となる。r_a と θ_a は $y(0), \dot{y}(0)$ が与えられているので,

$$y(0) = 2r_a e^{\frac{1}{2}} \cos\theta_a, \quad \dot{y}(0) = -\sqrt{3} r_a e^{\frac{1}{2}} \sin\theta_a$$

によって決まる。

10 最適化理論

問題 10.1

(1) 利潤を $\pi(x_1, x_2)$ で表す。

$$\pi(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} - (2x_1 + x_2).$$

1 階条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{x_1}} - 2 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{x_2}} - 1 = 0 \end{aligned}$$

である。これを解いて

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = 1$$

を得る。これを生産関数に代入して

$$y = 2\sqrt{\frac{1}{4}} + 2\sqrt{1} = 3$$

となる。

(2) 利潤 $\pi(x_1, x_2)$ のヘッセ行列 $\boldsymbol{D^2}\pi(x_1, x_2)$ は

$$\boldsymbol{D^2}\pi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \pi(x_1, x_2)}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 \pi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \pi(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \pi(x_1, x_2)}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2x_1\sqrt{x_1}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2x_2\sqrt{x_2}} \end{pmatrix}$$

である。$(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ において

$$\boldsymbol{D^2}\pi\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

は負値定符号である。すなわち，2 階の条件は満たされる。

問題 10.2

(1) ラグランジュ関数を次のように設定する。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x_1 x_2} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w).$$

1 階条件は次のとおり。

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = -(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w) = 0$$

(2) 1 階条件の 1 本目と 2 本目の両辺の比をとって λ を消去すると

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

となり，これを整理すると

$$p_1 x_1 = p_2 x_2$$

を得る。これを 3 本目（予算制約式）に代入して x_2 を消去すると

$$p_1 x_1 + p_1 x_1 = w$$

となり，これを x_1 について解くと

$$x_1 = \frac{w}{2p_1}$$

を得る。これを先ほどの式に代入して

$$x_2 = \frac{w}{2p_2}$$

を得る。

(3) ラグランジュ関数を次のように設定する。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = {x_1}^a {x_2}^b - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w).$$

1 階条件は次のとおり。

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = a{x_1}^{a-1}{x_2}^b - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = b{x_1}^{a}{x_2}^{b-1} - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = -(p_1x_1 + p_2x_2 - w) = 0$$

1 本目と 2 本目の両辺の比をとって λ を消去すると

$$\frac{ax_2}{bx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

となり，これを整理すると

$$x_2 = \frac{bp_1}{ap_2}x_1$$

を得る。これを 3 本目（予算制約式）に代入して x_2 を消去すると

$$p_1x_1 + \frac{bp_1}{a}x_1 = w$$

となり，これを x_1 について解くと

$$x_1 = \frac{aw}{(a+b)p_1}$$

を得る。これを先ほどの式に代入して

$$x_2 = \frac{bw}{(a+b)p_2}$$

を得る。

問題 10.3

(1) $u(x_1, x_2) = {x_1}^2x_2$ に $x_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{m}{p_2}$ を代入すると

$$U(x_1) = {x_1}^2\left(-\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{m}{p_2}\right) = -\frac{p_1}{p_2}{x_1}^3 + \frac{m}{p_2}{x_1}^2.$$

(2) $U'(x_1) = -\frac{3p_1}{p_2}{x_1}^2 + \frac{2m}{p_2}x_1$ より，増減表は次のようになる。

x_1	0	$\cdots$	$\frac{2m}{3p_1}$	$\cdots$
$U'(x_1)$	0	$+$	0	$-$
$U(x_1)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

増減表より，$U(x_1)$ は $x_1 = \frac{2m}{3p_1}$ のとき最大値をとる。

問題 10.4

(1) ラグランジュ関数を次のように設定する。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

1 階条件は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= 2 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= 1 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= -(x_1 + x_2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

これをみたす λ は存在しない。

(2) ラグランジュ関数を次のように設定する。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

1 階条件は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= 2x_1 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= 2x_2 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= -(x_1 + x_2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

これらを連立して解くと

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 1.$$

しかし $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は効用を最大にしていない。なぜなら，$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の効用水準は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

であるが，$(1, 0)$ は予算制約をみたし，その効用水準は

$$1^2 + 0^2 = 1$$

である。

問題 10.5

(1) 目的関数を $\pi(x_1, x_2)$ とおく。

$$\pi(x_1, x_2) = p \cdot (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) - \left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2\right).$$

1 階条件より

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{p}{2\sqrt{x_1}} - \frac{1}{4} = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{p}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{6} = 0$$

これを解くと $(x_1, x_2) = (4p^2, 9p^2)$ である。ここで $\pi(x_1, x_2)$ のヘッセ行列 $\boldsymbol{D^2}\pi(x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{D^2}\pi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \pi(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 \pi(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \pi(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \pi(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4x_1\sqrt{x_1}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4x_2\sqrt{x_2}} \end{pmatrix}$$

は（任意の $x_1, x_2 > 0$ について）負値定符号である。定理 10.9 より $\pi(x_1, x_2)$ は凹関数である。定理 10.10 より，利潤最大化問題の解は

$$x_1 = 4p^2, \;\; x_2 = 9p^2$$

である。これを生産関数に代入すると

$$y = \sqrt{4p^2} + \sqrt{9p^2} = 5p$$

である。

(2) ラグランジュ関数を次のように設定する。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \lambda(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - y).$$

1 階条件より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{1}{4} - \lambda\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{1}{6} - \lambda\frac{1}{2\sqrt{x_2}} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= -(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - y) = 0
\end{aligned}$$

1 本目と 2 本目の両辺の比をとって λ を消去すると

$$\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{3}{2}$$

となり，これを整理すると

$$\sqrt{x_2} = \frac{3}{2}\sqrt{x_1}$$

を得る。これを 3 本目に代入して x_2 を消去すると

$$\sqrt{x_1} + \frac{3}{2}\sqrt{x_1} = y$$

となり，これを x_1 について解くと

$$x_1 = \frac{4}{25}y^2.$$

したがって

$$x_2 = \frac{9}{25}y^2.$$

以上より，最小費用 $C(y)$ は

$$C(y) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{25}y^2 + \frac{1}{6} \times \frac{9}{25}y^2 = \frac{1}{10}y^2.$$

(3) $C''(y) = \frac{1}{10} > 0$ より，$C(y)$ は凸関数である。

(4)　目的関数を $\pi(y)$ とおく。

$$\pi(y) = py - \frac{1}{10}y^2.$$

$\pi(y)$ は上に凸の 2 次関数であるから，明らかに凹関数である。1 階条件

$$p - \frac{1}{5}y = 0$$

より

$$y = 5p$$

である。

11　確率論の展開

問題 11.1

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times 5 + \frac{1}{6}\times 6 = \frac{7}{2} \\ V(X) &= \frac{1}{6}\times\left(1-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\times\left(2-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\times\left(3-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\times\left(4-\frac{7}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\times\left(5-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\times\left(6-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

問題 11.2　X のとる値を $x_1, \cdots, x_n$ とし，その確率をそれぞれ $p_1, \cdots, p_n$ とする。

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= p_1(ax_1+b) + \cdots + p_n(ax_n+b) \\ &= a(p_1x_1 + \cdots + p_nx_n) + b(p_1 + \cdots + p_n) \\ &= aE(X) + b \\ V(aX+b) &= p_1\{ax_1 + b - (aE(X)+b)\}^2 + \cdots + p_n\{ax_n + b - (aE(X)+b)\}^2 \\ &= p_1a^2(x_1 - E(X))^2 + \cdots + p_na^2(x_n - E(X))^2 = a^2V(X) \end{aligned}$$

問題 11.3　学生の得点を X とする。チェビシェフの不等式（定理 11.3）において，$a = 20$ とすると

$$\mathrm{Prob}\{|X-60| \geqq 20\} \leqq \frac{10^2}{20^2} = \frac{1}{4}.$$

したがって，得点が 40〜80 点の生徒は全体の 75% を超える。

問題 11.4

$X \setminus Y$	2	6	計
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
計	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X, Y の周辺分布はそれぞれ次のようになる。

X	1	4
確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	2	6
確率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(1) 周辺分布より

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 4 = 3 \\
E(Y) &= \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 6 = 3 \\
V(X) &= \frac{1}{3} \times (1-3)^2 + \frac{2}{3} \times (4-3)^2 = 2 \\
V(Y) &= \frac{3}{4} \times (2-3)^2 + \frac{1}{4} \times (6-3)^2 = 3
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{4}(1-3)(2-3) + \frac{1}{12}(1-3)(6-3) + \frac{1}{2}(4-3)(2-3) \\
&\quad + \frac{1}{6}(4-3)(6-3) = 0 \\
\rho(X, Y) &= \frac{0}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = 0
\end{aligned}$$

(3) 独立である。実際

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}\{X=1\}\mathrm{Prob}\{Y=2\} &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = \mathrm{Prob}\{X=1, Y=2\} \\
\mathrm{Prob}\{X=1\}\mathrm{Prob}\{Y=6\} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \mathrm{Prob}\{X=1, Y=6\} \\
\mathrm{Prob}\{X=4\}\mathrm{Prob}\{Y=2\} &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \mathrm{Prob}\{X=4, Y=2\} \\
\mathrm{Prob}\{X=4\}\mathrm{Prob}\{Y=6\} &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} = \mathrm{Prob}\{X=4, Y=6\}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

問題 11.5　共分散の定義および問題 11.2 で示したの期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\ &= E[XY - E(Y)X - E(X)Y + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E[E(Y)X] - E[E(X)Y] + E[E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y).\end{aligned}$$

上式において，$X=Y$ とおくと

$$\mathrm{Cov}(X,X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$$

が成り立つ。

問題 11.6　100 万円のうち資産 x への投資する比率を θ とする。収益の分散は $V[(\theta X + (1-\theta)Y) \times 100\ 万] = 100\ 万^2 V(\theta X + (1-\theta)Y)$ である。$V[\theta X + (1-\theta)Y]$ を最小にする θ を求めればよい。ここで

$$\begin{aligned}V[\theta X + (1-\theta)Y] &= V[\theta X] + V[(1-\theta)Y] + 2\mathrm{Cov}(\theta X, (1-\theta)Y) \\ &= \theta^2 V(X) + (1-\theta)^2 V(Y) + 2\theta(1-\theta)\mathrm{Cov}(X,Y).\end{aligned}$$

$V(X)=4$, $V(Y)=1$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\frac{2}{3}$ であることを用いて上式を整理すると

$$V[\theta X + (1-\theta)Y] = \frac{19}{3}\theta^2 - \frac{10}{3}\theta + 1.$$

これより $V[\theta X + (1-\theta)Y]$ は $\theta = \frac{5}{19}$ のとき最小値 $\frac{32}{57}$ をとることがわかる。したがって，100 万円のうち約 26 万円を資産 x に投資し，残り 74 万円を資産 y に投資すればよい。

問題 11.7　(1)　定理 11.2, 11.4, 11.7 より

$$
\begin{aligned}
E(Y_n) &= E\left[\frac{X_1 + \cdots X_n}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n}E[X_1 + \cdots + X_n] \\
&= \frac{1}{n}\left[E(X_1) + \cdots + E(X_n)\right] \\
&= \frac{1}{n}(m \times n) = m. \\
V(Y_n) &= V\left[\frac{X_1 + \cdots X_n}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n^2}V[X_1 + \cdots + X_n] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[V(X_1) + \cdots + V(X_n)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}(n \times v^2) = \frac{v^2}{n}.
\end{aligned}
$$

(2)　(1) より $E(Y_n) = m$ であるから，チェビシェフの不等式（定理 11.3）より

$$
\mathrm{Prob}\left\{|Y_n - m| \geqq \varepsilon\right\} \leqq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{v^2}{n\varepsilon^2}.
$$

(3)　(2) より

$$
\mathrm{Prob}\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqq \varepsilon\right\} \leqq \frac{v^2}{n\varepsilon^2}
$$

であるから

$$
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqq \varepsilon\right\} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{v^2}{n\varepsilon^2} = 0
$$

である。したがって

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \mathrm{Prob}\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqq \varepsilon\right\}\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqq \varepsilon\right\} \\
&= 1 - 0 = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

注意　本練習問題の誤り等によって被ったとされるいかなる損害についても，解答作成者および東洋経済新報社は一切の責任を負いません。