『標準　マクロ経済学』（第 3 版）数学付録

この付録では，本書で用いる数学の公式をまとめています．いずれもマクロ経済学を学ぶ際に非常に役立つ公式なので，本書に限らず，大いに活用してください．以下では各公式についての具体例も示しています．

（A - 1）無限等比級数の和

$|x|<1$ のとき，

$$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

が成り立つ．あるいは上式は両辺に x をかけると，

$$x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}$$

と書くこともできる．

［A - 1 の例］

$x=\frac{1}{2}$ のとき，

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

となる．

（A - 2）連立方程式の解

x と y に関する連立方程式

$$ax+by=A$$

$$cx+dy=B$$

の解は，

$$x^* = \frac{dA - bB}{ad - bc},\quad y^* = \frac{aB - cA}{ad - bc}$$

である．ただし，$ad - bc \neq 0$．

［A - 2 の例］

$$x + 2y = 5$$

$$3x + 4y = 6$$

のとき，

$$x^* = \frac{4 \cdot 5 - 2 \cdot 6}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} = -\frac{8}{2} = -4,\quad y^* = \frac{1 \cdot 6 - 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} = \frac{9}{2}$$

となる．

（A - 3）積と商の近似式

x と y が 0 に十分近いとき，以下の等式が近似的に成り立つ．

$$(1+x)(1+y) = 1 + x + y$$

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + x - y$$

［A - 3 の例］

$x = 0.02$，$y = 0.05$ のとき，

$$(1+0.02)(1+0.05) = 1 + 0.02 + 0.05 = 1.07$$

$$\frac{1+0.02}{1+0.05} = 1 + 0.02 - 0.05 = 0.97$$

が近似的に成り立つ．

（A - 4）関数の最大値

1 変数関数 $y = f(x)$ は，次の 2 つの条件が満たされるとき，$x = x^*$ において最大値 $f(x^*)$ をとる．

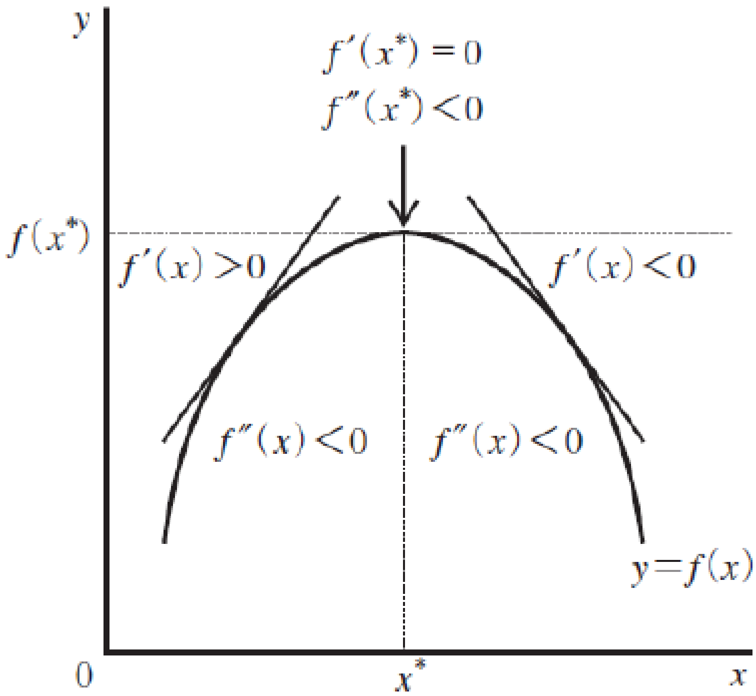
（A - 4 - 1）$f'(x^*) = 0$　（1 階の条件）

（A - 4 - 2）$x < x^*$ のとき $f'(x) > 0$，かつ $x > x^*$ のとき $f'(x) < 0$

なお，常に $f''(x) < 0$ となる関数 $f(x)$ を凹関数と言う．$f(x)$ が凹関数ならば，条件（A - 4 - 2）は必ず満たされるので，最大値を求めるためには 1 階の条件だ

けを調べればよい．図 A - 1 参照.

図 A–1　凹関数とその最大値



［A - 4 の例］

$f(x) = -x^2 + x$ のとき，1 階の条件 $f'(x) = -2x + 1 = 0$ より，$x^* = \dfrac{1}{2}$．さらに，$f''(x) = -2 < 0$ だから $f(x)$ は凹関数．よって，$f(x)$ は $x^* = \dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ をとる．なお，$x < \dfrac{1}{2}$ のとき $f'(x) > 0$，かつ $x > \dfrac{1}{2}$ のとき $f'(x) < 0$ であることを確認できる．

（A - 5）合成関数の微分

1 変数関数 $f(g(x))$ を x で微分するときは，まずそれを $f(X)$ と $X = g(x)$ の合成関数と考えて，

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(X)}{dX}\frac{dg(x)}{dx}$$

のように計算する．そしてその後に $\dfrac{df(X)}{dX}$ に $X=g(x)$ を代入する．

［A‐5 の例］

$(3x-2)^{10}$ を x で微分するときには，$(3x-2)^{10}$ を $f(X)=X^{10}$ と $X=3x-2$ の合成関数と考えて，

$$\frac{d}{dx}(3x-2)^{10}=\frac{dX^{10}}{dX}\frac{d(3x-2)}{dx}=10X^{9}3=30X^{9}$$

のように計算する．最後に上式の X に $X=3x-2$ を代入すると，

$$\frac{d}{dx}(3x-2)^{10}=30(3x-2)^{9}$$

という導関数を得る．

（A‐6）関数の積の微分

1 変数関数 $f(x)g(x)$ を x で微分するときは次のように計算する．

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

［A‐6 の例］

$x(3x-2)^{10}$ を x で微分するときには，$f(x)=x$，$g(x)=(3x-2)^{10}$ とおくと，$f'(x)=1$ であり，上の A‐5 の例より $g'(x)=30(3x-2)^{9}$ だから，

$$\frac{d}{dx}x(3x-2)^{10}=1\cdot(3x-2)^{10}+x\cdot 30(3x-2)^{9}=(33x-2)(3x-2)^{9}$$

となる．

（A‐7）関数の商の微分

1 変数関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を x で微分するときは次のように計算する．

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^{2}}$$

［A‐7 の例］

$\dfrac{x}{(3x-2)^{10}}$（ただし $x\neq\dfrac{2}{3}$）を x で微分するときには，$f(x)=x$，$g(x)=(3x-2)^{10}$

とおくと，$f'(x)=1$であり，上の A - 5 の例より $g'(x)=30(3x-2)^9$ だから，

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(3x-2)^{10}}=\frac{1\cdot(3x-2)^{10}-x\cdot 30(3x-2)^9}{(3x-2)^{20}}=\frac{3x-2-30x}{(3x-2)^{11}}=-\frac{27x+2}{(3x-2)^{11}}$$

となる．

なお，A - 7 の公式は，A - 6 の公式において $g(x)$ を $(g(x))^{-1}\left(=\dfrac{1}{g(x)}\right)$ に置き換えることによって導くこともできる．すなわち，

$$(f(x)(g(x))^{-1})'=f'(x)(g(x))^{-1}+f(x)[-(g(x))^{-2}]g'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

となる．

（A - 8）平面上のグラフの傾き

2 変数関数 $F(x,y)=0$ の xy 平面におけるグラフの傾きは，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,\ y)}{F_y(x,\ y)}$$

となる．ただし，$F_y(x,\ y)\neq 0$．特に $F(x_0,\ y_0)=0$ を満たす点 $(x_0,\ y_0)$ における傾きは，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x_0,\ y_0)}{F_y(x_0,\ y_0)}$$

となる．ただし，$F_y(x_0,\ y_0)\neq 0$．

n 変数関数 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0$ についても同様の関係が成り立つ．すなわち，その x_ix_j 平面におけるグラフの傾きは，

$$\frac{dx_j}{dx_i}=-\frac{F_{x_i}(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{F_{x_j}(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)},\ \ i\neq j,\ \ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

となる．ただし，$F_{x_j}(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)\neq 0$．特に $F(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)=0$ を満たす点 $(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)$ における傾きは，

$$\frac{dx_j}{dx_i}=-\frac{F_{x_i}(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ldots,\ \bar{x}_n)}{F_{x_j}(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ldots,\ \bar{x}_n)}$$

となる．ただし，$F_{x_j}(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ldots,\ \bar{x}_n)\neq 0$．

［A - 8 の例］

2 変数関数 $F(x,y)=x^2+2y^3=0$ の xy 平面におけるグラフの傾きは，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,\ y)}{F_y(x,\ y)}=-\frac{2x}{6y^2}=-\frac{x}{3y^2}$$

となる．ただし $y\neq 0$．特に $F(4,-2)=0$ を満たす点 $(4,-2)$ における傾きは，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(4,-2)}{F_y(4,-2)}=-\frac{4}{3(-2)^2}=-\frac{1}{3}$$

となる．

（A‐9）変化分の間の関係

2 変数関数 $F(x,y)=0$ について，x のわずかな変化分 dx に対する y の変化分 dy は，

$$dy=-\frac{F_x(x,\ y)}{F_y(x,\ y)}dx$$

となる．ただし，$F_y(x,\ y)\neq 0$．特に $F(x_0,\ y_0)=0$ を満たす点 $(x_0,\ y_0)$ の近くにおいては，

$$dy=-\frac{F_x(x_0,\ y_0)}{F_y(x_0,\ y_0)}dx$$

が成立する．ただし，$F_y(x_0,\ y_0)\neq 0$．

n 変数関数 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0$ についても同様の関係が成り立つ．すなわち，x_i のわずかな変化分 dx_i に対する x_j の変化分 dx_j は，

$$dx_j=-\frac{F_{x_i}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{F_{x_j}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}dx_i,\quad i\neq j,\quad i,\ j=1,2,\cdots,n$$

となる．ただし，$F_{x_j}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\neq 0$．特に $F(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)=0$ を満たす点 $(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)$ の近くにおいては，

$$dx_j=-\frac{F_{x_i}(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)}{F_{x_j}(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)}dx_i$$

が成立する．ただし，$F_{x_j}(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\cdots,\ \bar{x}_n)\neq 0$．

［A‐9 の例］

2 変数関数 $F(x,y)=x^2+2y^3=0$ について，x のわずかな変化分 dx に対する y の変化分 dy は，

$$dy = -\frac{F_x(x,\ y)}{F_y(x,\ y)}dx = -\frac{2x}{6y^2}dx = -\frac{x}{3y^2}dx$$

となる．ただし $y \neq 0$．特に $F(4,\ -2) = 0$ を満たす点 $(4,\ -2)$ の近くにおいては，

$$dy = -\frac{F_x(4,\ -2)}{F_y(4,\ -2)}dx = -\frac{4}{3(-2)^2}dx = -\frac{1}{3}dx$$

が成立する．

(A - 10) 自然対数 $y = \log x,\ x > 0$ の性質

(A - 10 - 1) 導関数は $y' = \dfrac{1}{x}$ となる．

(A - 10 - 2) $a > 0$， $b > 0$， c に対して次式が成立する．

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

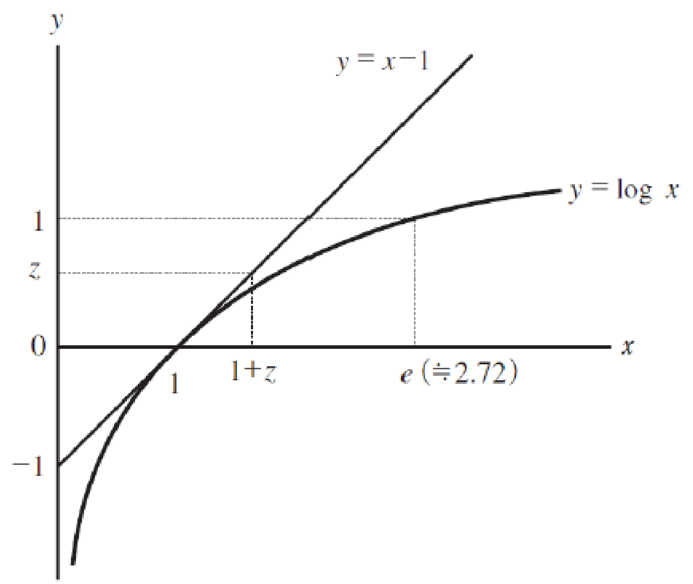
$$\log a^c = c \log a$$

(A - 10 - 3) z が 0 に十分近いとき近似的に，

$$\log(1+z) = z$$

が成立する．図 A - 2 参照．

図 A–2　自然対数



［A‐10 の例］

自然対数の性質から近似的に，

$$\log 2.72 = 1.00$$

である（図 A‐2 参照）．そうすると，公式（A‐10‐2）より近似的に，

$$\log (2.72)^2 = 2\log 2.72 = 2\times 1.00 = 2.00$$

となる．

公式（A‐10‐1）より $y' = \dfrac{1}{x}$ だから， $y = \log x$ の $x = \dfrac{1}{2}, 1, 2$ における接線の傾きは各々，$2, 1, \dfrac{1}{2}$ となる．特に $x = 1$ のとき $y = \log 1 = 0$ だから， $y = \log x$ のグラフ上の点 $(1, 0)$ における接線の方程式は， $y = x - 1$ となる（図 A‐2 参照）．これは x が 1 に十分近いときには $y = \log x$ と $y = x - 1$ の値がほぼ等しいことを意味する．それら 2 つの方程式で $x = 1 + z$ とすると公式（A‐10‐3）が得られる．この公式より近似的に，

$$\log 1.01 = \log (1 + 0.01) = 0.01$$

$$\log 0.99 = \log (1 - 0.01) = -0.01$$

となる．

さらに公式（A‐10‐2）より $\log[(1.01)\times(0.99)] = \log(1.01) + \log(0.99)$ だから，$\log[(1.01)\times(0.99)]$ の値は近似的に，

$$\log[(1.01)\times(0.99)] = \log(1.01) + \log(0.99) = 0.01 - 0.01 = 0.00$$

のように計算できる．同様に， $\log\dfrac{1.01}{0.99}$ の値も，

$$\log\frac{1.01}{0.99} = \log(1.01) - \log(0.99) = 0.01 + 0.01 = 0.02$$

のように近似的に求めることができる．

以上