

黒住 英司 [著]

〈サピエンティア〉

# 計 量 経 済 学

訂正 および 練習問題解答

(2016/12/12 版)

訂正 .....	1
練習問題解答 .....	3

## 『計量経済学』訂正

- p.69, 定理 3.8 の証明の 4 行目「一方, 分子については」以降の証明を以下に訂正:

一方, 分子については,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) U_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x) U_i - (\bar{X} - \mu_x) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i.$$

右辺第 1 項は,

$$E \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x) U_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu_x)] E[U_i] = 0.$$

$$\begin{aligned} V \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x) U_i \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[(X_i - \mu_x)(X_j - \mu_x) U_i U_j] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu_x)^2] E[U_i^2] \\ &= \frac{\sigma_x^2 \sigma^2}{n} \end{aligned}$$

となる。したがって, チェビシェフの不等式より,  $n \rightarrow \infty$  の時,

$$P(|\text{右辺第 1 項}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V[(\text{右辺第 1 項})^2] = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\sigma_x^2 \sigma^2}{n} \rightarrow 0$$

となるので, 0 に確率収束する。また, 右辺第 2 項については, 仮定 3.3(i) と大数の法則より,

$$(\bar{X} - \mu_x) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \xrightarrow{p} 0$$

となる。したがって, 分子  $\xrightarrow{p} 0$  となる。よって, 定理 2.7(iii) より,

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) U_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \xrightarrow{p} \frac{0}{\sigma_x^2} = 0$$

が証明された。 $a$  についても, 同様に証明できる。■

- p.92, 問題 4(d): (誤)  $\hat{V}_i = \tilde{b}_2 \hat{W}_i + \hat{E}_i$ , (正)  $\hat{V}_i = \tilde{b}_1 \hat{W}_i + \hat{E}_i$
- p.110, (5-21) 式の最後, (誤)  $\cdots + 0.1 X_{i-1}$ , (正)  $\cdots + 0.1 X_{i-4}$

- p.124, 問題 2 : (誤) 定数以外の説明変数の係数がすべて同一の値であるという仮説を検証したい。(正) 定数以外の説明変数の係数がすべて 0 であるという仮説を検証したい。
- p.125, 問題 3 : (次の文章を最後に追加) ただし, (6-12) 式の推定残差は 91 であったとする。p.136, 6 行目, (誤)  $\sigma_i^2 = X_i^2$ , (正)  $\sigma_i^2 = cX_i$
- p.141, 定理 8.1 の次の文 : (誤) 基本的仮定 4.3(iv) のように, (正) 基本的仮定 4.3(v) のように
- p.149, 8.3.2, (追加説明) 一般化最小 2 乗法での推定の際は,  $W_i = 1$  とすると (8-10) 式は

$$Y_i = \alpha W_i + \beta X_i + U_i$$

となり,

$$\tilde{Y}_1 = \sqrt{1 - \hat{\phi}^2} Y_1, \quad \tilde{W}_1 = \sqrt{1 - \hat{\phi}^2}, \quad \tilde{X}_1 = \sqrt{1 - \hat{\phi}^2} X_1,$$

とし,  $i = 2, \dots, n$  については,

$$\tilde{Y}_i = Y_i - \hat{\phi} Y_{i-1}, \quad \tilde{W}_i = 1 - \hat{\phi}, \quad \tilde{X}_i = X_i - \hat{\phi} X_{i-1}$$

と変形して,  $i = 1, \dots, n$  を使って  $\tilde{Y}_i$  を  $\tilde{W}_i$  と  $\tilde{X}_i$  に回帰したときの係数が,  $\hat{\alpha}$  と  $\hat{\beta}$  となる。

- p.166, (9-27) 式において, (誤)  $\beta_{2i}$ , (正)  $\beta_2$
- p.171, 問題 2 : (誤) 偏りを求めよ, (正) 漸近的な偏りを求めよ

## 練習問題解答

(以下では，小数点以下第3位や第4位を適宜，四捨五入している.)

### 第1章

問題1 限界性向 = 0.55，平均性向 = 0.57，弾力性 = 0.97.

問題2 (1-3) 式の関係を用いて，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X}) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(X_i - \bar{X}) - \bar{X} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(X_i - \bar{X}).\end{aligned}$$

問題3 (1-4) 式の関係を用いて，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i(Y_i - \bar{Y}) - \bar{Y} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i(Y_i - \bar{Y}).\end{aligned}$$

問題4 (1-3) 式または (1-4) 式の関係を用いて，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \bar{Y}) - \bar{X} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \bar{Y}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i - \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\bar{Y} \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \bar{Y} + \sum_{i=1}^n \bar{X} \bar{Y} \\
&= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y} - n \bar{X} \bar{Y} + n \bar{X} \bar{Y} \\
&= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}.
\end{aligned}$$

問題 5 (1-1) 式の分子に (1-7) の関係式を代入すれば得られる .

問題 6 (a) 残差平方和は

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta X_i)^2$$

となるので , 最小化の 1 階の条件より ,

$$\frac{dS(\beta)}{d\beta} = -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \beta X_i) = 0.$$

これより ,  $\beta$  の最小 2 乗推定量は ,

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

となる .

(b) (a) で求めた  $b$  の表現より ,

$$\sum_{i=1}^n \hat{U}_i = \sum_{i=1}^n (Y_i - b X_i) = \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \sum_{i=1}^n X_i$$

となるが , 右辺は一般には 0 とならない . すなわち , 性質 1 は成り立たない . 一方 ,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n X_i \hat{U}_i &= \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - b X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0.
\end{aligned}$$

従って , 性質 2 の左辺は 0 となる . しかしながら , 性質 1 が成り立たないため , 性質 2 の 2 番目の等号は一般には成り立たない . 性質 3 については ,

$$\bar{\hat{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b X_i = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

であるが，右辺は一般には  $\bar{Y}$  とはならないので性質 3 は成り立たない．性質 4 の左辺は性質 2 より，

$$\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{U}_i = b \sum_{i=1}^n X_i \hat{U}_i = 0$$

が成り立つが，性質 1 が成り立たないため，2 番目と 3 番目の等号は成り立たない．同様に，性質 5 も

$$b\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \neq \bar{Y}$$

より，成り立たない．

(c) 決定係数を導出する関係式の表現は，性質 1 と 4 を使っていたが，どちらも成り立たないため， $TSS = ESS + RSS$  は一般には成り立たない．従って，定数項のない回帰式では決定係数  $R^2$  は当てはまりの尺度としては適切ではない．

## 第 2 章

問題 1 (a) (i)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A^c = \{5, 6\}$  なので，

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(A^c) = \frac{1}{3} \quad \therefore P(A) + P(A^c) = 1.$$

同様に， $B = \{4, 5, 6\}$ ,  $B^c = \{1, 2, 3\}$  なので，

$$P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(B^c) = \frac{1}{2} \quad \therefore P(B) + P(B^c) = 1.$$

(ii) の  $A \subset B$  はここでは成立たないので確認しない．(iii) は， $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  より  $P(A \cup B) = 1$ ．一方，

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 1.$$

(b)  $A \cap B = \{4\}$  なので，

$$P(A|B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

(c)  $P(A \cap B) = 1/6$ ．一方， $P(A|B) = 1/3$  なので，

$$P(B)P(A|B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

同様に,  $P(B|A) = 1/4$  より,

$$P(A)P(B|A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

問題 2 分布関数を  $F(x)$  とすると,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & : x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & : a < x \leq b \\ 1 & : x > b \end{cases}.$$

$$\text{平均} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{分散} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

問題 3 以下,  $X, Y$  が連続確率変数の場合の証明を示す (離散型の場合も, 積分記号を和記号にかえて同様に示すことができる). 確率変数  $X, Y$  の周辺確率密度関数を  $f_X(x), f_Y(y)$ , 同時確率密度関数を  $f_{X,Y}(x, y)$  とする.

$$(i) E[a] = \int_{-\infty}^{\infty} a f_X(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = a.$$

$$\begin{aligned} (ii) E[aX + b] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f_X(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = aE[X] + b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) E[X + Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E[X] + E[Y]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iv) E[cg(X) + dh(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (cg(x) + dh(y)) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx \\ &\quad + d \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx + d \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y) dy \\ &= cE[g(X)] + dE[h(Y)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v) \quad V[aX + b] &= \int_{-\infty}^{\infty} \{(ax + b) - E[aX + b]\}^2 f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \{a(x - E[X])\}^2 f_X(x) dx \\
&= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx = a^2 V[X].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(vi) \quad V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE[X] + (E[X])^2) f_X(x) dx \\
&= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2.
\end{aligned}$$

問題 4 5 つの点は直線上に並んでいるので，相関係数は 1 (ただし， $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$  の場合を除く)。

問題 5

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu.$$

$$\begin{aligned}
V[\bar{X}] &= E[(\bar{X} - \mu)^2] \\
&= E\left[\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right\}^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)].
\end{aligned}$$

ここで， $i = j$  ならば  $E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] = \sigma^2$ ， $i \neq j$  ならば  $E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] = 0$  なので，

$$V[\bar{X}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

問題 6 (a) 定理 2.5 の大数の法則より， $\bar{X}_1 \xrightarrow{p} \mu_1$ ， $\bar{X}_2 \xrightarrow{p} \mu_2$  となるので，定理 2.7 より， $2\bar{X}_1 + 3\bar{X}_2 \xrightarrow{p} 2\mu_1 + 3\mu_2$ .



(b) 定理 2.6 の中心極限定理より ,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}(\bar{X}_1 - \mu_1) &\xrightarrow{d} \frac{1}{\sigma_1}N(0, \sigma_1^2) \sim N(0, 1), \\ \frac{\sqrt{n}}{\sigma_2}(\bar{X}_2 - \mu_2) &\xrightarrow{d} \frac{1}{\sigma_2}N(0, \sigma_2^2) \sim N(0, 1).\end{aligned}$$

今,  $X_{1i}$  と  $X_{2i}$  は独立であるから, 定理 2.9 とカイ 2 乗分布の定義より ,

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}(\bar{X}_1 - \mu_1)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_2}(\bar{X}_2 - \mu_2)\right)^2 \xrightarrow{d} \chi_2^2.$$

問題 7 巻末の付表をもとに求めると, 両側検定の場合は 2.575, 片側検定の場合は 2.325(Excel などにより厳密に計算をすると, 両側検定の場合は 2.5758, 片側検定の場合は 2.3263) .

### 第 3 章

問題 1 3.1.1 で挙げた理由以外に, 例えば, アンケート調査の結果だと回答を正直に答えてない, という場合もありうる .

問題 2 56 ページの (3-3) 式の次の表現より ,

$$V[a] = E[(a - \alpha)^2] = \bar{X}^2 V[b] + E[\bar{U}^2] - 2\bar{X}E[(b - \beta)\bar{U}].$$

ここで ,

$$\begin{aligned}E[\bar{U}^2] &= \frac{\sigma^2}{n}, \\ E[(b - \beta)\bar{U}] &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})U_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i\right] \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\sigma^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = 0.\end{aligned}$$

従って ,

$$V[a] = \frac{\sigma^2 \bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

$$\begin{aligned}Cov(a, b) &= E[\{-(b - \beta)\bar{X} + \bar{U}\}(b - \beta)] \\ &= -\bar{X}E[(b - \beta)^2] + E[(b - \beta)\bar{U}] \\ &= -\frac{\sigma^2 \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + 0.\end{aligned}$$

問題 3 (3-6) , (3-7) , (3-8) を代入して計算すれば求まる .

問題 4

$$\begin{aligned} a &= \bar{Y} - b\bar{X} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\bar{X} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i Y_i, \quad \text{ただし } c_i = \frac{1}{n} - \frac{\bar{X}(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \end{aligned}$$

問題 5 任意の線形不偏推定量を  $a^* = \sum_{i=1}^n c_i^* Y_i$  とする .  $a^*$  は不偏推定量であるから ,

$$\begin{aligned} E[a^*] &= \sum_{i=1}^n c_i^* E[Y_i] \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^* E[\alpha + \beta X_i + U_i] \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n c_i^* + \beta \sum_{i=1}^n c_i^* X_i = \alpha \end{aligned}$$

となる . 最後の等式より ,  $a^*$  が不偏推定量となるためには ,

$$\sum_{i=1}^n c_i^* = 1, \quad \sum_{i=1}^n c_i^* X_i = 0$$

が成り立たなければいけない . これより ,

$$a^* = \sum_{i=1}^n c_i^* (\alpha + \beta X_i + U_i) = \alpha + \sum_{i=1}^n c_i^* U_i$$

となるので ,

$$V[a^*] = \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^{*2}.$$

また , 最小 2 乗推定量  $a$  も線形推定量であるから ,

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n c_i X_i = 0$$

が成立つことが確認できるので

$$V[a] = \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2$$

となる．ここで，(3-22) 式と同様にすると  $\sum_{i=1}^n c_i(c_i^* - c_i) = 0$  という関係を示すことができるので，

$$\sum_{i=1}^n c_i^{*2} = \sum_{i=1}^n \{c_i + (c_i^* - c_i)\}^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 + \sum_{i=1}^n (c_i^* - c_i)^2$$

が得られる．この関係を使うと，

$$\begin{aligned} V[a^*] &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^{*2} \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n (c_i^* - c_i)^2 \\ &\geq \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2 = V[a]. \end{aligned}$$

問題 6 仮定より  $\bar{X} \xrightarrow{p} \mu_x$  である．また，大数の法則より  $\bar{U} \xrightarrow{p} 0$ ，定理 3.8 の証明にあるとおり  $b \xrightarrow{p} \beta$  であるから，56 ページの (3-3) 式の次の表現より，

$$a = \alpha - (b - \beta)\bar{X} + \bar{U} \xrightarrow{p} \alpha - (\beta - \beta)\mu_x + 0 = \alpha.$$

#### 第 4 章

問題 1 最小 2 乗推定量は (4-6) 式を満たしているので，(4-6) 式の各  $\beta_1, \dots, \beta_K$  を  $b_1, \dots, b_K$  で置き換えれば，最初の式から性質 1 が，2 番目から  $K$  番目の式から性質 2 が得られる．また，最初の式を  $2n$  で割って整理すれば性質 3 が得られる．性質 4 は  $\hat{Y}_i = b_1 + b_2 X_{2i} + \dots + b_K X_{Ki}$  であるから，性質 1 と 2 を用いて得られる．性質 5 は性質 3 の右辺の平均を  $X_{ki}$  の平均を用いて表現すれば得られる．

問題 2 (a)  $R^2 = 0.8$ ， $\bar{R}^2 = 0.796$ ．

(b)  $t$  値はそれぞれ 7，2， $-1.25$  なので  $p$  値はそれぞれ 0，0.0456，0.2112．

(c)  $t$  検定統計量は 0.125 であるが臨界値は 1.96 なので，帰無仮説は棄却されない．

(d) 信頼区間は  $-0.5 \pm 0.4 \times 1.96$  より， $[-1.284, 0.284]$ ．

問題 3 それぞれ， $[-0.219, 0.097]$ ， $[0.064, 0.142]$ ， $[0.594, 0.960]$ ， $[-1.417, -0.621]$ ．

問題 4 (a) (4-6) 式と同様に考えると,  $b_1$  と  $b_2$  は次の式を満たす.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n X_{1i}(Y_i - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n X_{2i}(Y_i - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}) &= 0\end{aligned}$$

これより, 問題の表現が得られる.

(b)

$$b_1 = \frac{S_{22}S_{1Y} - S_{12}S_{2Y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad b_2 = \frac{S_{11}S_{2Y} - S_{12}S_{1Y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

(c)

$$b_{Y2} = \frac{S_{2Y}}{S_{22}}, \quad b_{12} = \frac{S_{12}}{S_{22}}.$$

(d)  $\hat{V}_i = Y_i - b_{Y2}X_{2i}$ ,  $\hat{W}_i = X_{1i} - b_{12}X_{2i}$  なので,

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n \hat{W}_i \hat{V}_i}{\sum_{i=1}^n \hat{W}_i^2} \\ &= \frac{(S_{22}S_{1Y} - S_{12}S_{2Y})/S_{22}}{(S_{11}S_{22} - S_{12}^2)/S_{22}} \\ &= \frac{S_{22}S_{1Y} - S_{12}S_{2Y}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = b_1.\end{aligned}$$

問題 5 (4-12) 式の両辺に  $X_{1i}$ ,  $X_{2i}$  をそれぞれかけて和をとると,

$$S_{1Y} = \beta_1 S_{11} + \beta_2 S_{12} + S_{1U}, \quad S_{2Y} = \beta_1 S_{12} + \beta_2 S_{22} + S_{2U}$$

となるので, これを  $b_1$  の分子に代入すると,

$$b_1 = \beta_1 + \frac{S_{22}S_{1U} - S_{12}S_{2U}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

が得られる. いま,  $X_1$ ,  $X_2$  と  $U$  は独立なので,

$$E[b_1|X_1, X_2] = \beta_1 + \frac{S_{22}E[S_{1U}] - S_{12}E[S_{2U}]}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \beta_1.$$

これより,  $E[b_1] = E[E[b_1|X_1, X_2]] = \beta_1$  となる. また, 上の表現より,

$$\begin{aligned}b_1 &= \beta_1 + \frac{\frac{1}{n}S_{22}\frac{1}{n}S_{1U} - \frac{1}{n}S_{12}\frac{1}{n}S_{2U}}{\frac{1}{n}S_{11}\frac{1}{n}S_{22} - (\frac{1}{n}S_{12})^2} \\ &\xrightarrow{p} \beta_1 + \frac{\text{plim}\frac{1}{n}S_{22} \times 0 - \text{plim}\frac{1}{n}S_{12} \times 0}{\text{plim}\frac{1}{n}S_{11}\frac{1}{n}S_{22} - \text{plim}(\frac{1}{n}S_{12})^2} = \beta_1.\end{aligned}$$

## 第 5 章

問題 1 (5-18) 限界性向  $= 0.95 \times 9.5 \div 4.1 = 2.20$ , 弾力性  $= 0.95$  . (5-19) 限界性向  $= 9.5 \times 0.23 = 2.19$ , 弾力性  $= 0.23 \times 4.1 = 0.94$  . (5-20) 限界性向  $= 10.05 \div 4.1 = 2.45$ , 弾力性  $= 10.05 \div 9.5 = 1.06$  .

問題 2 平方完成により最小化される時間を求めると, 7 分である .

問題 3 個人  $i$  が  $j$  年生の時に 1 をとるダミー変数を  $D_{ji}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) として,

$$Y_i = \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \alpha_4 D_{4i} + \beta X_i + U_i.$$

もしくは, 定数項を入れていずれか 1 つのダミー変数を除いても良い .

問題 4 時点  $i$  が年度の前半の時に 1 をとるダミー変数を  $D_{1i}$  として,

$$Y_i = \alpha + \delta_c D_{1i} + \beta X_i + \delta_X D_{1i} X_i + U_i$$

を推定し,  $\delta_X = 0$  の検定を  $t$  値で行う . もしくは, 年度の後半に 1 をとるダミー変数を使っても良い .

問題 5 (5-21) 短期乗数  $= 0.5$ , 長期乗数  $= 1.9$ , 平均ラグ  $= 1.32$ , メディアン・ラグ  $= 1$  . (5-22) 短期乗数  $= 2$ , 長期乗数  $= 2 + 2 \times 0.7 + 2 \times 0.7^2 + \cdots = 2/0.3 = 6.67$ , 平均ラグ  $= (\sum_{s=0}^{\infty} s \times 2 \times 0.7^s) / (\sum_{s=0}^{\infty} 2 \times 0.7^s) = 0.7/0.3 = 2.33$ , メディアン・ラグ  $= 1$  .

問題 6  $b_1^* = \bar{Y} - b_2^* \bar{X}_2$  であり, (5-15) 式より,  $\bar{Y} = \beta_1 + \beta_2 \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3 + \bar{U}$  であるので, 5.5.2 の結果より,

$$E[b_1^*] = \beta_1 - \beta_3 \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2} \bar{X}_2 + \beta_3 \bar{X}_3,$$

$$b_1^* \xrightarrow{p} \beta_1 - \beta_3 \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{22}} \mu_{2x} + \beta_3 \mu_{3x}.$$

問題 7 (5-23) 式の AIC は 0.49, BIC は 0.56, (5-24) 式の AIC は 0.12, BIC は 0.23 なので, どちらの規準でも (5-24) 式が望ましい .

問題 8 (a)  $g(Y_i) = \log Y_i$ , (b)  $g(Y_i) = \sqrt{Y_i}$  .

## 第 6 章

問題 1 (a)  $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$ ,  $H_1: \beta_2$  と  $\beta_3$  の少なくともどちらか一方は 0 ではない, (b) 2 つ, (c)  $Y_i = \beta_1 + \beta_4 X_{4i} + U_i$ , (d)  $F = 1.857$ , 臨界値は 3.37 なので帰無仮説は棄却されない. また,  $W = 3.714$ , 臨界値は 5.991 なので帰無仮説は棄却されない.

問題 2 (a)  $H_0: \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ ,  $H_1: \beta_2, \beta_3, \beta_4$  の少なくとも一つは 0 ではない, (b) 3 つ, (c)  $Y_i = \beta_1 + U_i$ , (d)  $F = 1.981$ , 臨界値は 2.98 なので帰無仮説は棄却されない. また,  $W = 5.943$ , 臨界値は 7.815 なので帰無仮説は棄却されない.

問題 3  $\sup W = 18.86$ , 有意水準 5 % の臨界値は 16.45 なので帰無仮説は有意水準 5 % で棄却される. 従って, 構造変化が起きた可能性がある.

## 第 7 章

問題 1 (a)  $E[a] = E[\bar{Y}] - E[b]\bar{X} = (\alpha + \beta\bar{X} + E[\bar{U}]) - \beta\bar{X} = \alpha$ .

(b) 第 3 章問題 2 より,

$$\begin{aligned} V[a] &= \bar{X}^2 V[b] + E[\bar{U}^2] - 2\bar{X} E[(b - \beta)\bar{U}] \\ &= \frac{\bar{X}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sigma_i^2}{\{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\}^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2} - \frac{2\bar{X} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \sigma_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \end{aligned}$$

問題 2 (a) ステップ 1:  $Y_i$  を  $1, X_i, X_i^2, X_i^3$  に回帰し,  $\hat{U}_i$  を得る. ステップ 2:  $\hat{U}_i^2$  を  $1, X_i, X_i^2, X_i^3, X_i^4, X_i^5, X_i^6$  に回帰し,  $R^2$  を得る. ステップ 3:  $nR^2$  を  $\chi_6^2$  の臨界値と比較する. (b)  $\chi_6^2$  の上側 5 % 点は 12.59 なので, 帰無仮説は棄却される.

問題 3  $Y_i/X_i$  を  $1/X_i$  と 1 に回帰すればよい.

## 第 8 章

問題 1 (a)  $E[a] = E[\bar{Y}] - E[b]\bar{X} = (\alpha + \beta\bar{X} + E[\bar{U}]) - \beta\bar{X} = \alpha$ .

(b) 第 3 章問題 2 より,

$$\begin{aligned} V[a] &= \bar{X}^2 V[b] + E[\bar{U}^2] - 2\bar{X}E[(b - \beta)\bar{U}] \\ &= \frac{\bar{X}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})\sigma_{ij}}{\{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\}^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}}{n^2} \\ &\quad - \frac{2\bar{X} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \bar{X})\sigma_{ij}}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \end{aligned}$$

問題 2 例えば, 企業で働いている人の毎月の所得は残業代などで月々異なるが, 基本給が頻繁に変わることがないので, 前後する月の給与は正の相関を持つ. すなわち, 所得のデータは正の系列相関を持つ. このような正の系列相関を持つ変数を本来, 説明変数に含めなければいけないのに誤って含めなかった場合, 回帰式の誤差項にはこの変数が含まれるため, 誤差項に系列相関が生じる.

問題 3 例えば, (8-1) 式の誤差項が正の系列相関を持つ場合に, 説明変数, 被説明変数それぞれ差分をとってから回帰をすると, 誤差項に負の系列相関が生じることがある.

問題 4  $\chi_{10}^2$  の上側 5 % 点は 18.31 なので, 系列相関が無いという帰無仮説は棄却されない.

問題 5 1 次から 3 次の標本自己相関係数は 0 に近い値であるが, 4 次の標本自己相関係数は比較的大きな正の値をとっている. データが四半期ごとに観測されていることから, 系列相関は主に同一四半期の間でのみ生じていることがわかる.

問題 6 ステップ 1:  $Y_i$  を定数 ( $X_{1i} = 1$  とする) と  $X_{2i}, X_{3i}$  に回帰して,  $\hat{U}_i$  を得る. ステップ 2:  $\hat{U}_i$  を  $\hat{U}_{i-1}$  に回帰して  $\hat{\phi}$  を得る. ステップ 3:  $i = 1$  については,  $\tilde{Y}_1 = \sqrt{1 - \hat{\phi}^2} Y_1$ ,  $\tilde{X}_{11} = \sqrt{1 - \hat{\phi}^2}$ ,  $\tilde{X}_{21} = \sqrt{1 - \hat{\phi}^2} X_{21}$ ,  $\tilde{X}_{31} = \sqrt{1 - \hat{\phi}^2} X_{31}$ ,  $i = 2, \dots, n$  については  $\tilde{Y}_i = Y_i - \hat{\phi} Y_{i-1}$ ,  $\tilde{X}_{1i} = 1 - \hat{\phi}$ ,  $\tilde{X}_{2i} = X_{2i} - \hat{\phi} X_{2i-1}$ ,  $\tilde{X}_{3i} = X_{3i} - \hat{\phi} X_{3i-1}$  としたうえで,  $i = 1, 2, \dots, n$  のデータで  $\tilde{Y}_i$  を  $\tilde{X}_{1i}, \tilde{X}_{2i}, \tilde{X}_{3i}$  に回帰すれば,  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$  が得られる.

## 第 9 章

問題 1

$$a = \alpha + \bar{U} - (b - \beta)\bar{X} \xrightarrow{p} \alpha - \frac{\gamma_{xu}\mu_x}{\sigma_x^2}.$$

問題 2

$$\begin{aligned}
 b_2^* &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2} \\
 &= \beta_2 + \beta_3 \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2} + \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)(U_i - \bar{U})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2} \\
 &\xrightarrow{p} \beta_2 + \beta_3 \frac{\sigma_{3x} \rho_{2,3}}{\sigma_{2x}}.
 \end{aligned}$$

問題 3

$$\begin{aligned}
 b_{1,IV} &= \beta_1 + \bar{U} - (b_{2,IV} - \beta_2)\bar{X}_2 - \cdots - (b_{K,IV} - \beta_K)\bar{X}_K \\
 &\xrightarrow{p} \beta_1 + 0 - (\beta_2 - \beta_2)\mu_{2x} - \cdots - (\beta_K - \beta_K)\mu_{Kx} = \beta_1.
 \end{aligned}$$

問題 4 3つの方程式はすべて丁度識別である。

第 10 章

問題 1 (8-13) 式より,  $i = 2, \dots, n$  については変形後のモデルの誤差項が  $i.i.d.(0, \sigma_\varepsilon^2)$  となる。

$i = 1$  の場合は, モデルの両辺に  $\sqrt{1 - \phi^2}$  をかけると,

$$\sqrt{1 - \phi^2} Y_1 = \alpha \sqrt{1 - \phi^2} + \beta \sqrt{1 - \phi^2} X_1 + \sqrt{1 - \phi^2} U_1$$

となる。このとき,  $V[\sqrt{1 - \phi^2} U_1] = \sigma_\varepsilon^2$  となる。すなわち, 真の  $\phi$  の値を用いた場合の一般化最小 2 乗法とは, 誤差項が基本的仮定を満たすような変換を施した上で最小 2 乗推定を行うことと同じである。ただし, 実際には  $\phi$  は未知であるので, 一致推定量である  $\hat{\phi}$  で置き換えている。

問題 2

$$Cov(Y_i, Y_{i-h}) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & : h = 0 \\ \sigma^2(\theta_1 + \theta_1\theta_2) & : |h| = 1 \\ \sigma^2\theta_2 & : |h| = 2 \\ 0 & : |h| \geq 3 \end{cases}$$

問題 3 ラグ次数 = 1。



問題 4  $Y_i = Y_1 + U_2 + \cdots + U_i$  より,  $E[Y_i^2] = Y_1^2 + \sigma^2(i-1)$  となる. これより,

$$E \left[ \sum_{i=2}^n Y_{i-1}^2 \right] = (n-1)Y_1^2 + \sigma^2 \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

問題 5 (10-19) 式より,

$$\begin{aligned} Y_i &= \phi_1 Y_{i-1} + \cdots + \phi_{p-1} Y_{i-p+1} + \phi_p Y_{i-p+1} - \phi_p Y_{i-p+1} + \phi_p Y_{i-p} + U_i \\ &= \phi_1 Y_{i-1} + \cdots + (\phi_{p-1} + \phi_p) Y_{i-p+1} + (-\phi_p) \Delta Y_{i-p+1} + U_i \end{aligned}$$

となるので, これを繰り返していけばよい.

## 第 11 章

問題 1 第 1 式と第 2 式, 第 1 式と第 3 式, 第 2 式と第 3 式からそれぞれ 3 つの 1 次差分推定量が得られる. この 3 つの推定量の加重和などが考えられる (ただし, そういった推定量が統計的に優れた性質を持っているとは限らない).

問題 2 分子と分母を全変動  $TSS$  で割り,  $R^2 = 1 - SSR/TSS$  (第 1 章では残差平方和を  $RSS$  と表記していた点に注意) の関係を用いればよい.

問題 3  $Y_{it}$ ,  $X_{it}$ ,  $U_{it}$  について, 時間  $t$  を固定してクロスセクション方向でとった平均を  $\bar{Y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{it}$ ,  $\bar{X}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{it}$ ,  $\bar{U}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{it}$  とすると, もとの式のクロスセクション方向の平均は

$$\bar{Y}_t = \alpha + \beta \bar{X}_t + \gamma Z_t + \bar{U}_t$$

となるので, この式をもとの式から引くと,

$$(Y_{it} - \bar{Y}_t) = \beta(X_{it} - \bar{X}_t) + (U_{it} - \bar{U}_t)$$

となるので, この式を最小 2 乗法で推定すればよい.

問題 4  $(a) = \sigma_u^2$ ,  $(b) = (c) = 0$  となるので, 基本的仮定は満たされる.

## 第 12 章

問題 1 順序選択モデル

問題 2 多項ロジットモデル

問題 3 ポアソン回帰モデル

問題 4 2 値選択モデル

問題 5 順序選択モデル